This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

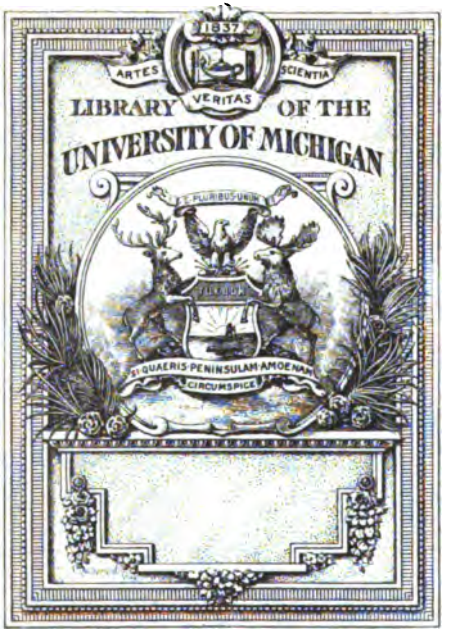
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Digitized by Google



Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
304
F529

Digitized by Google

Digitized by Google

J-34

4.4.S-1

Digitized by Google

Digitized by Google

216

Neue Ansichten

über die

Grundprincipien

der

Differenzialrechnung

von

D. JOHANN CARL FISCHER

ordentlichem Professor der Mathematik und Astronomie auf der Königl. Preuss. Universität zu Greifswald und verschiedener gelehrten Gesellschaften Ehrenmitgliede.

Mit einer Kupfertafel.

Leipzig,
in Baumgärtners Buchhandlung
1831.

Digitized by Google

Digitized by Google

Sr. Königlichen Hoheit

dem

Durchlauchtigsten

Kronprinzen und Herrn

Joseph Franz Oskar

Kronprinzen von Schweden, Herzoge von Südermannland, General der Infanterie und Vice-Könige von Norwegen

widmet

diese Bogen

ehrfurchtsvoll

der Verfasser.

Digitized by Google

Digitized by Google

Durchlauchtigster, Gnädigster Kronprinz und Herr!

Ew. Königliche Hoheit gegenwärtige Bogen zuzueignen, und durch Höchst Dero vorgesetzten Namen denselben einen vorzüglichen Glanz zu geben, würde ich mich nicht erkühnen, wenn mir nicht zu bekannt wäre, mit welcher Milde Höchst Dieselben die Opfer der tiefsten Ehrfurcht anzunehmen geruhen.

Der Gegenstand, welchen diese Bogen enthalten, wird Ew. Königlichen Hoheit, als einem besonderen Verehrer der mathematischen Wissenschaften, ohne Zweifel nicht gleichgültig seyn. Es hat nämlich den grössten und berühmtesten Mathematikern noch nicht gelingen wollen, die Grundprincipien der Differenzialrechnung auf reine Anschauung zurückzubringen, und es ist daher ein neuer Versuch gewiss nicht zu miss-

Digitized by Google

billigen, wie es wol möglich seyn könnte, dieser wichtigen Forderung ein Genüge zu thun.

Mein höchster Wunsch wird erfüllt seyn, wenn Ew. Königliche Hoheit diese meine Bemühung huldreichst und gnädigst anzunehmen geruhen wollen. Nie wird aus meinem Herzen die tiefste Ehrerbietung verdrängt werden, mit welcher ich ersterbe

Ew. Königlichen Hoheit

Greifswald, den 1. März 1831.

unterthänigster Diener
J. E. Fischer.

Digitized by Google

Vorrede.

Wenn die reine Mathematik die einzige Wissenschaft ist, welche unserem Geiste die absolute Evidenz ihrer Lehren gleichsam abzwingt, so kann dies mit demselben Rechte von dem reinen Theile der höhern Rechenkunst verlangt werden. Allein die bisherigen vielfältigen Bemühungen der grössten und berühmtesten Mathematiker haben diese Wahrheit zu bestätigen nicht vermocht, und es ist noch keinem gelungen, die Grundprincipien der Differenzialrechnung so darzulegen, dass sie in der reinen Anschauung erkannt würden, obgleich ihre allgemeinen Gesetze in dem grössten Umfange sind entwickelt, und zur Auflösung der schwierigsten Aufgaben in der höhern Geometrie und in allen Theilen der angewandten Mathematik mit dem glücklichsten und bewundernswürdigsten Erfolge angewendet worden. Leibnitz, dieser scharfsinnige Erfinder der Differenzialrechnung, und nach ihm besonders der berühmte Analytiker Leonhard Euler, und nach der Zeit mehrere andere grosse Mathematiker, nahmen zur Begründung der Differenzialrechnung unendlich kleine Grössen an; andere berühmte Mathematiker, in Deutschland Kaestner, und in Frankreich l'Hulier und Dalembert glaubten die wahren Gründe derselben in den Grenzen der Verhältnisse

Digitized by Google

zwischen dem Wachsthume einer Funktion und ihrer Hauptgrösse zu finden, und noch andere berühmte Mathematiker suchten mit Vermeidung der unendlich kleinen Grössen auf mancherlei andern Wegen diese höhere Rechenkunst zu begründen. Bei Vergleichung aller dieser Methoden zur Feststellung der Grundprincipien fanden sich aber gegen die eine und die andere geringere und grössere nicht ungegründete Zweifel. Ich habe es daher gewagt neue Ansichten über die Grundprincipien der Differenzialrechnung zu entwerfen, welche ich hiermit den Kennern der Mathematik vorlege.

Zuerst war mir vorzüglich darum zu thun, zu beweisen, dass unendliche Grössen überhaupt gar kein Gegenstand mathematischer Untersuchungen seyn können, und dass besonders der Begriff von unendlich kleinen Grössen, welche kleiner seyn sollen, als jede anzugebende Grösse, sich selbst widerspreche, und mithin die wahren Gründe der Differenzialrechnung nicht in unendlich kleinen Grössen liegen können, sondern vielmehr in dem Gebiete endlicher Grössen zu suchen sind. Leonh. Euler hatte bereits die richtige Idee von der Differenzialfunktion aufgefasst, und sie als die einfachste Differenzform der allgemeinen Differenzfunktion einer gegebenen Funktion betrachtet, in welcher die Differenz der veränderlichen Grösse (Δx) gleich Null geworden ist. Er wurde aber auf die irrige Vorstellung geleitet, dass $dx=0$ eine unendlich kleine Grösse sey, und stellte daraus Behauptungen auf, die mit sich nicht bestehen konnten. Ich habe mich übrigens bemüht, die Grundgesetze der Differenzialrechnung so deutlich vorzutragen, dass selbst der Anfänger, wenn ihm nur die Natur der Funktionen, die Erfindung ihrer Differenzen, und der binomische Lehrsatz mit den vier Rechnungsarten bekannt sind, keine Schwierigkeit, sie zu verstehen, finden wird. Ich

Digitized by Google

erlaube mir nur noch, zur richtigern und genauern Einsicht des Vorgetragenen hier Folgendes beizufügen. Es ist bekannt, dass der allgemeine Ausdruck der Differenzialfunktion einer Funktion, welche die veränderliche Grösse x enthält, $Adx = A.0 = 0$ ist, wo A den einfachsten Coefficienten von dx oder Null vorstellt, wenn in der allgemeinen Differenzfunktion $\triangle x$ oder hier dx gleich Null geworden ist. Dieser Coefficient ist gerade die Hauptgrösse, auf welche es in der Differenzialfunktion ankommt. Setzt man nun die veränderliche Grösse y der Funktion von x gleich, so wird $dy = Adx = 0$, und daher $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = A$. Es ist also die Hauptgrösse A in der Differenzialfunktion jederzeit als ein Quotient zu betrachten, welcher entsteht, wenn Null durch Null dividirt wird, und nicht anders, als durchs Differenziren der gegebenen Funktion gefunden werden kann. Es stimmt dies auch mit der gemeinen Arithmetik, ohne dabei die mystischen Begriffe von unendlich kleinen Grössen zu Hülfe nehmen zu dürfen, aufs vollkommenste zusammen, indem $\frac{0}{0}$ eine jede gedenkbare Zahl als Quotient seyn kann, und man findet auch, wenn $\frac{0}{0} = A$ gesetzt wird, daraus $A.0 = 0 = Adx = dy$ wieder, wie die gemeine Rechenkunst verlangt. Eben so anschaulich erhellt, dass die Ausdrücke $A^2dx^2 = A^2.0^2 = 0^2 = dy^2$; $A^3dx^3 = A^3.0^3 = 0^3 = dy^3$, und überhaupt $A^ndx^n = A^n0^n = 0^n = dy^n$ ihre bestimmten Bedeutungen haben müssen. Man erhält daraus $\frac{dy^2}{dx^2} = A^2 = \frac{0^2}{0^2}$; $\frac{dy^3}{dx^3} = A^3 = \frac{0^3}{0^3}$ und $\frac{dy^n}{dx^n} = A^n = \frac{0^n}{0^n}$, und es sind ebenfalls die Potenzen von A als Quotienten anzusehen, welche durch Potenzen von Nullen dividirt entstehen, aber erst durchs Differenziren der Funktion bestimmt werden; daher können auch die Ausdrücke

*

Digitized by Google

$\frac{0}{0}, \frac{0^2}{0^2}, \frac{0^3}{0^3}, \frac{0^n}{0^n}$ einander nicht gleich seyn. Ob nun also gleich $0, 0^2, 0^3 \ldots 0^n$ statt der Bezeichnungen $dx, dx^2, dx^3 \ldots dx^n$ gesetzt werden könnten, indem dadurch die Hauptgrösse A, auf welche es in der Differenzialfunktion allein ankommt, gar keine Aenderung leidet, so haben doch die letztern aus verschiedenen wichtigen Gründen unverkennbare Vorzüge, wie in der Schrift selbst ist angeführt worden.

Greifswald, den 21. Februar 1831.

Fischer.

Digitized by Google

Neue Ansichten

über

die Grundprincipien der Differenzialrechnung.

---

§. 1.

Unendlich heisst alles dasjenige, was keine Grenzen hat, und was uns daher nicht gegeben werden kann. Es ist folglich für sich klar, dass eine wissenschaftliche Erörterung unendlicher Grössen gar kein Gegenstand unsers Wissens seyn und werden kann. Auch hat in der That die gesammte niedere und höhere Mathematik so wol zur Begründung aller ihrer Theile, als auch zur anschaulichen Entwickelung ihrer Gesetze keine unendlichen Grössen nöthig. Die Ausdrücke: Infinitesimalcalcül, Rechnung des Unendlichen, Analysis des Unendlichen u. s. f. sind aus irrigen Vorstellungen von unendlichen Grössen entstanden, wodurch eben die Grundprincipien der Differenzialrechnung in ein dunkles Licht sind versetzt worden. Man muss sich wirklich wundern, dass dieser wichtige Zweig der Mathematik nicht allein in Hinsicht der Theorie, sondern auch in Rücksicht seiner Anwendung auf Arithmetik, höhere Geometrie, Mechanik, Hydraulik u. s. w. zu einer so hohen Stufe der Vollkommenheit gekommen ist, und gleichwol die Grundprincipien desselben nach so vielen und verschiedenen Versuchen bis zur Zeit noch schwankend und unsicher geblieben sind. Es scheint daher mit Schwierigkeiten verbunden zu seyn, die richtigen und wahren Gründe so auffinden zu können, dass gar kein Zweifel dagegen mehr statt findet. Allein mich dünkt, dass diese Schwierigkeiten bloss in den allgemein angenommenen unrichtigen Begriffen ihren Ursprung haben, und, abgesehen von diesen, die wahren Gründe nicht tief liegen. Es verdient also gewiss dieser wichtige Gegenstand eine neue und genaue Untersuchung. Nach der langen Reihe von Jahren, in welchen ich mich vorzüglich mit der reinen höhern Mathematik beschäftigt habe, bin ich endlich jetzt auf neue Ansichten über die Grundprincipien der höhern Rechenkunst gekommen, welche sich nicht auf unendlich kleine Grössen, sondern ganz allein auf endliche Grössen stützen. Ich werde sie in möglichst gedrängter Kürze mit gehöriger Deutlichkeit darstellen.

Digitized by Google

§. 2.

In der gesammten Mathematik kommt es vorzüglich auf deutliche, bestimmte und genaue Begriffe an, aus welchen dann auch richtige Schlüsse gezogen und anschauliche Grundsätze festgestellt werden können. Die bisherigen Begriffe von unendlich kleinen Grössen, welche zur Begründung der Differenzialrechnung sind gebraucht worden, sind meiner Ueberzeugung nach unsicher, irrig, und sich selbst widersprechend. Man behauptet nämlich, das Differenzial sey eine unendlich kleine Grösse, oder eine solche, welche kleiner ist, als jede Grösse, die sich angeben lässt. Dieser misslungene Begriff ist ohne Sinn, und hat seinen Ursprung von der Theilung einer Grösse bis ins Unendliche erhalten. Man ist der Meinung, dass die bis ins Unendliche getheilte Grösse mit einer unendlichen Grösse gleichbedeutend sey. Allein dies ist irrig; denn eine unendlich kleine Grösse ist gar nicht denkbar, und kann folglich nie gegeben werden. Dagegen kann aber eine jede endliche Grösse einer Theilung bis ins Unendliche unterworfen werden. Eine gerade Linie z. B. lässt sich so wol bis ins Unendliche vergrössern, als auch bis ins Unendliche verkleinern; allein man würde offenbar in einem Irrthume begriffen seyn, wenn man behaupten wollte, dass im erstern Falle die Linie wirklich unendlich gross und im zweiten unendlich klein würde; denn in beiden Fällen müsste die Linie gränzenlos geworden seyn, welches aber dem Ausdrucke: eine Grösse bis ins Unendliche vermehren oder vermindern, völlig widerspricht. Es hat vielmehr hiermit folgende Bewandniss. Eine jede Grösse nämlich ist uns nur als etwas Ganzes oder Zusammengesetztes gegeben, es sind uns aber nicht die Theile gegeben, aus welchen das Ganze zusammengesetzt ist, d. h. die unendliche Theilbarkeit der Grösse ist keine nothwendige Folge, welche das Zusammengesetzte mit sich führt. Sie ist bloss in unserer Vorstellung wirklich, und muss daher so weit möglich seyn, so weit wir in der Vorstellung theilen können. Weil nun derselben keine Grenzen gesetzt sind, so ist auch die Theilung unendlich; allein sie ist uns doch niemals als unendlich gegeben, mithin folgt daraus auch nicht, dass die Grösse aus einer unendlichen Menge von Theilen zusammengesetzt sey, darum, weil ihre Theilung bis ins Unendliche geht. Die Grösse, welche als etwas Zusammengesetztes gegeben ist, kann daher auch keine wirklich vollendete Theilung bis ins Unendliche beweisen, obgleich in selbiger der Grund von der Theilbarkeit bis ins Unendliche liegt. Hiernach spricht man z. B. nicht bestimmt genug, wenn man sagt: der Kreis könne als ein regulaires Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden; richtiger und genauer würde man sich ausdrücken: dem Kreise könne sich ein regulaires Polygon unendlich nähern.

§. 3.

Die Mathematik giebt uns eine Menge von Beispielen an die Hand, welche die im vorigen §. festgesetzten Bestimmungen aufs vollkommenste und deutlichste bestätigen. Wenn z. B. in einem rechtwinklichten Dreiecke, wo das Quadrat der Hypothe-

Digitized by Google

nuse den Quadraten der Catheten zusammengenommen gleich ist, die beiden Catheten in Zahlen ausgedrückt sind, z. B. der eine Cathetus = 1, und der andere = 2, so findet man die Länge der Hypothenuse = $\sqrt{5}$, mithin in einer Irrationalzahl, von welcher kein aliquoter Theil angegeben werden kann, durch welchen die Länge der Hypothenuse genau zu bestimmen möglich wäre. Hier liegt offenbar der Grund der unendlichen Theilbarkeit in der Irrationalzahl $\sqrt{5}$; allein sie ist nicht als unendlich gegeben, und es lässt sich folglich auch nicht die Länge der Hypothenuse als aus einer unendlichen Menge von Theilen zusammengesetzt darstellen. Wird dagegen das rechtwinklichte Dreieck aus den gegebenen Catheten durch Construction bestimmt, so wird die Länge der Hypothenuse genau gefunden. Hier in diesem letzten Falle ist uns also das Ganze oder Zusammengesetzte gegeben, aber nicht die Theile, aus welchen das Ganze zusammengesetzt ist, oder die unendliche Theilbarkeit der zu bestimmenden Länge der Hypothenuse ist keine nothwendige Folge, welche das Ganze oder das Zusammengesetzte mit sich führt.

Eben so lässt sich von der Irrationalzahl $\sqrt{3}$ kein aliquoter Theil finden, welcher dieselbe genau bestimmte; allein man ist doch im Stande einen rationalen Theil anzugeben, welcher von der Irrationalzahl $\sqrt{3}$ weniger verschieden ist, als jede noch so kleine anzugebende Zahl. Ueberhaupt biethen uns die sogenannten incommensurabeln Grössen sehr viele Fälle dar, wo eine Theilung bis ins Unendliche statt findet. Man kann aber hierbei jederzeit einen rationalen Theil finden, welcher von der bis ins Unendliche zu theilenden Grösse weniger verschieden ist, als irgend eine noch so kleine angebliche Grösse. Wenn man daher eines Theils behauptet, eine unendlich kleine Grösse sey eine solche, welche kleiner als jede angebliche Grösse ist, und andern Theils gleichwol mit vollem Rechte annimmt, es lasse sich bei jeder ins Unendliche zu theilenden Grösse ein rationaler Theil bestimmen, welcher von jener Grösse doch noch weniger verschieden ist, als jede noch so kleine angebliche Grösse, so findet hier offenbar der grösste Widerspruch statt. Durch das Hinausschieben bis ins Unendliche wird wol der rationale Theil genauer bestimmt, allein nie eine unendlich kleine Grösse bezweckt, welche gar nicht möglich ist. Es ist also hierdurch unläugbar bewiesen, dass unendliche Grössen nur eingebildete Dinge sind, und dass folglich die wahren Grundprincipien der höhern Rechenkunst nicht in unendlich kleinen Grössen gesucht werden können, wie dies bisher geschehen ist.

§. 4.

Zum Glück bedarf die Differenzialrechnung zu ihrer Begründung keiner einzigen eingebildeten unendlich kleinen Grösse; sie erzeugt sich vielmehr in ihrer wahren Schönheit und in verlangter mathematischer Schärfe aus dem Schosse endlicher Grössen. Sie ist nämlich ihrer Natur und ihrem Wesen nach die Bestimmung der einfachsten und leichtesten Differenzform von irgend einer Funktion, in welcher der Zuwachs oder die Differenz der veränderlichen Grösse (Δx) eine wirkliche Null, und mithin die Differenz selbst gleich Null geworden ist. Denn in jeder allgemeinen

Digitized by Google

Differenzfunktion kann, wie bekannt, Δx jeden willkührlichen Werth erhalten, und hiervon hängt dann auch der Werth der ganzen Differenzfunktion ab. Man kann daher auch statt Δx Null setzen, und eben in diesem Falle wird die einfachste und zugleich die wichtigste Differenzform, welche wir Differenzialfunktion nennen wollen, entstehen. Es wird die Folge mit der grössten Deutlichkeit zeigen, dass nach dieser Ansicht die ganze höhere Analysis fest und unerschütterlich begründet wird, und dieselbe keinesweges als eine künstliche Nullenrechnung zu betrachten sey.

Wir bezeichnen mit dem berühmten Leibnitz, dem Erfinder der Differenzialrechnung, Δx, sobald es Null geworden ist, mit dx, und nennen es alsdann Differenzial. Man könnte unbeschadet der Wahrheit in der Differenzialfunktion statt dx auch Null setzen; allein das Zeichen dx, wie selbst in der Folge noch mehr hervorleuchten wird, hat bei der Entwickelung der Differenzialfunktionen in vielen Hinsichten unverkennbare Vorzüge; denn zuerst zeigt es uns sogleich deutlich an, welche veränderliche Grösse in der Funktion, deren Differenzialfunktion zu suchen war, zum Grunde lag, und sodann zweitens giebt uns diese Bezeichnung das schönste und beste Mittel, aus der Differenzialfunktion die Funktion selbst, oder das Integral, leicht und ohne Verwirrung wieder zu finden, welche nicht zu vermeiden wäre, wenn man in der Differenzialfunktion statt dx die Null setzen wollte. Wenn z. B. die Funktion $a+bx$ gegeben ist, so wird ihre Differenz oder $\Delta(a+bx) = a+b(x+\Delta x) - a - bx = a+bx+b\Delta x - a - bx = b\Delta x$, und, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, die Differenzialfunktion $= bdx = b.0 = 0$. Wollte man behaupten, dass bdx nicht gleich Null wäre, so müsste es irgend einer, und wenn noch so kleinen Grösse, gleich seyn; man nehme $bdx = q$, folglich $dx = \frac{q}{b}$ als Etwas, was sich selbst widerspricht.

§. 5.

Da also die Differenzialrechnung blos in der Bestimmung der einfachsten und leichtesten Differenzform irgend einer gegebenen oder gefundenen Funktion besteht, in welcher die Differenz der veränderlichen Grösse (Δx) gleich Null geworden ist; so erhellet, dass das Aggregat oder der Unterschied irgend einer Grösse mit dem einfachen oder vielfachen Differenziale einer veränderlichen Grösse der erstern Grösse gleich seyn muss. So ist nämlich $a+dx$ oder $a+ndx = a$; eben so ist auch $x+dx$, oder $x+\frac{m}{n}dx = x$. Ferner ist auch hieraus klar, dass in jeder Differenzfunktion, in welcher ausser Δx, auch noch Δx^2, Δx^3, $\Delta x^4 \ldots \Delta x^n$ vorkommen, alle Glieder, welche damit sind multiplicirt worden, gänzlich wegfallen, wenn Δx gleich Null oder dx geworden oder die einfachste Differenzform entwickelt ist. Wenn z. B. die Funktion $2ax - x^2$ gegeben ist, so ergiebt sich die allgemeine Differenzfunktion, oder $\Delta.(2ax - x^2) = 2a(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2 - (2ax - x^2) = 2ax + 2a\Delta x - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 - 2ax + x^2 = 2a\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2$, folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, die Differenzialfunktion $= 2a\,dx - 2x\,dx$

Digitized by Google

$= (a-x)\,2dx = 0$. Aus einer solchen einfachen Differenzform einer allgemeinen Differenzfunktion lässt sich nun aber auch umgekehrt das Integral leicht finden, welches aus der allgemeinen Differenzfunktion mit weit grösserer Schwierigkeit bestimmt werden kann. So ergiebt sich z. B. aus der Differenzialfunktion $3x^2dx$ sehr leicht das Integral x^3, welches aber weit schwieriger aus der Differenzfunktion $3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$ entwickelt werden kann. Wenn aber einmal eine Differenzialfunktion ist gefunden worden, wie z. B. $bdx = b \cdot 0 = 0$, so ist man von der Wahrheit überzeugt, dass auch $b^2dx^2 = b^2 \cdot 0^2 = 0^2$; $b^3dx^3 = b^3 \cdot 0^3 = 0^3$, und überhaupt $b^ndx^n = b^n \cdot 0^n = 0^n$ seyn müsse. Ueberhaupt mag die gefundene Differenzialfunktion eine Form haben, welche man will, so kann sie alsdann, unbeschadet der Wahrheit, in eine jede willkührliche Potenz erhoben, oder auch jede Wurzel daraus ausgezogen werden. So wird also, wenn $2(a-x)\,dx = 0$ ist, auch $4(a-x)^2dx^2 = 0^2$; $8(a-x)^3\,dx^3 = 0^3$ u. f. wahr seyn müssen. Welche richtige und wichtige Folgen hieraus gezogen werden können, wird aus dem Folgenden deutlich erhellen, ohne dass die sich selbst widersprechenden unendlich kleinen Grössen mit ins Spiel dabei kommen dürften.

§. 6.

Die bisher fest gesetzten Begriffe mit den daraus abgeleiteten richtigen Folgen sind hinreichend, mit höchster mathematischer Evidenz die Differenzialfunktionen von allen möglichen gedenkbaren gegebenen oder gefundenen Funktionen zu bestimmen. Um hierbei mit möglichster Deutlichkeit zu Werke zu gehen, soll mit den algebraischen Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse der Anfang gemacht werden.

Es ist

$$\Delta \cdot x^2 = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

und daher, wenn Δx gleich Null angenommen wird, das Differenzial

$$d \cdot x^2 = 2x\,dx = 0.$$

$$\Delta \cdot x^3 = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3,$$

folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$d \cdot x^3 = 3x^2dx = 0.$$

$$\Delta \cdot x^4 = (x+\Delta x)^4 - x^4 = x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4$$
$$= 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4,$$

und daher, wenn Δx gleich Null ist, das Differenzial

$$d \cdot x^4 = 4x^3dx = 0 \text{ u. f. u. f.}$$

Ueberhaupt ist

$$\Delta \cdot x^n = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}\Delta x^3 + \text{u. f.} - x^n$$
$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}\Delta x^3 + \text{u. f.}$$

Digitized by Google

mithin, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$d \cdot x^n = n x^{n-1} dx = 0.$$

Ich finde nicht nöthig, mehrere Beispiele dieser Art anzuführen, indem schon aus diesen klar hervorgeht, dass die Differenzialfunktionen nur alsdann mit mathematischer Schärfe gefunden werden können, wenn in den allgemeinen Differenzfunktionen Δx gleich Null gesetzt, und mithin die dadurch erhaltenen einfachsten Differenzformen ebenfalls gleich Null geworden sind. Aus dem bisher angenommenen mystischen und sich selbst widersprechenden Begriffe von unendlich kleinen Grössen lassen sich die Differenzialfunktionen solcher Funktionen nicht mit derselben mathematischen Gewissheit darstellen. Denn ist dx nicht in aller Strenge gleich Null, so kann auch nicht in aller Strenge dx^2, dx^3, dx^4 u. f. gleich Null seyn, und es würde daher unmöglich in völliger mathematischer Schärfe

$d \cdot x^2 = 2x dx$, sondern vielmehr $d \cdot x^2 = 2x dx + dx^2$

$d \cdot x^3 = 3x^2 dx$ — — $d \cdot x^3 = 3x^2 dx + 3x dx^2 + dx^3$ u. s. f. u. s. f.

gefunden werden.

Nach dieser letzten Vorstellung würde also die Differenzialrechnung eine solche Rechnung seyn, welche Resultate lieferte, die nicht in aller Strenge, sondern nur beinahe wahr wären.

§. 7.

Wenn die Exponenten der Potenzen ganze negative Zahlen sind, so lassen sich ihre Differenzialfunktionen mit nöthiger mathematischer Evidenz ebenfalls auf keine andere Art finden, als wenn man in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse, oder Δx gleich Null setzt, wodurch auch die Differenzialfunktion selbst gleich Null wird. Folgende Beispiele werden den schönsten Beweis liefern:

$$\Delta \cdot \frac{1}{x} = \Delta \cdot x^{-1} = (x+\Delta x)^{-1} - x^{-1} = x^{-1} - x^{-2}\Delta x + x^{-3}\Delta x^2 - \text{u. f.} - x^{-1}$$
$$= -x^{-2}\Delta x + x^{-3}\Delta x^2 - x^{-4}\Delta x^3 + \text{u. f.},$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$d \cdot \frac{1}{x} = -x^{-2} dx = -\frac{dx}{x^2} = 0.$$

$$\Delta \cdot \frac{1}{x^2} = \Delta \cdot x^{-2} = (x+\Delta x)^{-2} - x^{-2} = x^{-2} - 2x^{-3}\Delta x + 3x^{-4}\Delta x^2 - \text{u. f.} - x^{-2}$$
$$= -2x^{-3}\Delta x + 3x^{-4}\Delta x^2 - 4x^{-5}\Delta x^3 + \text{u. f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null angenommen wird, das Differenzial

$$d \cdot \frac{1}{x^2} = -2x^{-3} dx = -\frac{2dx}{x^3} = 0,$$

$$\Delta \cdot \frac{1}{x^3} = \Delta \cdot x^{-3} = (x+\Delta x)^{-3} - x^{-3} = x^{-3} - 3x^{-4}\Delta x + 6x^{-5}\Delta x^2 - \text{u. f.} - x^{-3}$$
$$= -3x^{-4}\Delta x + 6x^{-5}\Delta x^2 - \text{u. f.}$$

Digitized by Google

mithin, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$d.\frac{1}{x^3} = -3x^{-4}dx = -\frac{3dx}{x^4} = 0.$$

Ueberhaupt ist

$$\Delta.\frac{1}{x^n} = \Delta.x^{-n} = (x+\Delta x)^{-n} - x^{-n}$$

$$= x^{-n} - nx^{-n-1}\Delta x + \frac{n.n+1}{1.2}x^{-n-2}\Delta x^2 - \text{u. s. f.} - x^{-n}$$

$$= -nx^{-n-1}\Delta x + \frac{n.n+1}{1.2}x^{-n-2}\Delta x^2 - \text{u. f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null ist, das Differenzial

$$d.\frac{1}{x^n} = -nx^{-n-1}dx = -\frac{ndx}{x^{n+1}} = 0.$$

§. 8.

Auch von allen denjenigen Funktionen, in welchen die Exponenten der Potenzen positive oder negative gebrochene Zahlen sind, können die Differenzialfunktionen auf keine andere Weise mit nöthiger mathematischer Evidenz entwickelt werden, als wenn in ihrer allgemeinen Differenzform die Differenz der veränderlichen Grösse oder Δx gleich Null gesetzt wird. Folgende Beispiele werden hiervon ebenfalls die besten Beweise geben:

$$\Delta\sqrt{x} = \Delta.x^{\frac{1}{2}} = (x+\Delta x)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x - \tfrac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}\Delta x^2 + \text{u. f.} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x - \tfrac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}\Delta x^2 + \text{u. f.}$$

folglich, wenn Δx gleich Null wird, das Differenzial

$$d.\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 0.$$

$$\Delta\sqrt[3]{x} = \Delta.x^{\frac{1}{3}} = (x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x - \tfrac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2 + \text{u. f.} - x^{\frac{1}{3}}$$

$$= \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x - \tfrac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2 + \text{u. f.},$$

folglich, wenn Δx gleich Null ist, das Differenzial

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0.$$

$$\Delta\sqrt[4]{x} = \Delta.x^{\frac{1}{4}} = (x+\Delta x)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Delta x - \tfrac{3}{32}x^{-\frac{7}{4}}\Delta x^2 + \text{u. f.} - x^{\frac{1}{4}}$$

$$= \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Delta x - \tfrac{3}{32}x^{-\frac{7}{4}}\Delta x^2 + \text{u. f.},$$

und daher, wenn Δx gleich Null geworden das Differenzial

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}} = 0.$$

Digitized by Google

Ueberhaupt wird

$$\Delta \sqrt[n]{x} = \Delta . x^{\frac{1}{n}} = (x+\Delta x)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}$$

$$= x^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} \Delta x + \frac{1-n}{2n^2} x^{\frac{1-2n}{n}} \Delta x^2 + \text{u. f.} - x^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} \Delta x + \frac{1-n}{2n^2} x^{\frac{1-2n}{n}} \Delta x^2 + \text{u. f.}$$

und folglich, wenn Δx gleich Null ist, das Differenzial

$$d . \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} dx \sqrt[n]{x^{1-n}} = 0.$$

Ferner findet man

$$\Delta \sqrt[4]{x^3} = \Delta . x^{\frac{3}{4}} = (x+\Delta x)^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{4}} + \tfrac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} \Delta x - \tfrac{3}{32} x^{-\frac{5}{4}} \Delta x^2 + \text{u. f.} - x^{\frac{3}{4}}$$

$$= \tfrac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} \Delta x - \tfrac{3}{32} x^{-\frac{5}{4}} \Delta x^2 + \text{u. f.},$$

und, wenn Δx gleich Null geworden ist, das Differenzial

$$d . \sqrt[4]{x^3} = \frac{3 dx}{4 \sqrt[4]{x}} = 0.$$

$$\Delta \sqrt[3]{x^2} = \Delta . x^{\frac{2}{3}} = (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \Delta x - \tfrac{1}{9} x^{-\frac{4}{3}} \Delta x^2 + \text{u. f.} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$= \tfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \Delta x - \tfrac{1}{9} x^{-\frac{4}{3}} \Delta x^2 + \text{u. f.}$$

folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$d . \sqrt[3]{x^2} = \frac{2 dx}{3 \sqrt[3]{x}} = 0.$$

$$\Delta x \sqrt[3]{x^2} = \Delta . x^{\frac{5}{3}} = (x+\Delta x)^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{5}{3}} + \tfrac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} \Delta x + \tfrac{5}{9} x^{-\frac{1}{3}} \Delta x^2 - \text{u. f.} - x^{\frac{5}{3}}$$

$$= \tfrac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} \Delta x + \tfrac{5}{9} x^{-\frac{1}{3}} \Delta x^2 - \text{u. f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null wird, das Differenzial

$$d . x \sqrt[3]{x^2} = \frac{5 \sqrt[3]{x^2} . dx}{3} = 0.$$

Digitized by Google

Ueberhaupt ergiebt sich

$$\Delta \sqrt[n]{x^m} = \Delta . x^{\frac{m}{n}} = (x+\Delta x)^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}$$

$$= x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \Delta x + \frac{m . m-n}{2n^2} x^{\frac{m-2n}{n}} \Delta x^2 + \text{u. f.} - x^{\frac{m}{n}}$$

$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \Delta x + \frac{m . m-n}{2n^2} x^{\frac{m-2n}{n}} \Delta x^2 + \text{u. f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$d . \sqrt[n]{x^m} = \frac{m \sqrt[n]{x^{m-n}}}{n} dx = 0.$$

Endlich findet man noch

$$\Delta \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \Delta . x^{-\frac{2}{3}} = (x+\Delta x)^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} - \tfrac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \Delta x + \tfrac{1}{3} x^{-\frac{8}{3}} \Delta x^2 - \text{u. f.} - x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -\tfrac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \Delta x + \tfrac{1}{3} x^{-\frac{8}{3}} \Delta x^2 - \text{u. f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null wird, das Differenzial

$$d . \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{2 dx}{3x \sqrt[3]{x^2}} = 0.$$

Ueberhaupt ist

$$\Delta . \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \Delta . x^{\frac{-m}{n}} = (x+\Delta x)^{\frac{-m}{n}} - x^{\frac{-m}{n}}$$

$$= x^{\frac{-m}{n}} - \frac{m}{n} x^{\frac{-m-n}{n}} \Delta x + \frac{m . m+n}{2n^2} x^{\frac{-m-2n}{n}} \Delta x^2 - \text{u. f.} - x^{\frac{-m}{n}}$$

$$= -\frac{m}{n} x^{\frac{-m-n}{n}} \Delta x + \frac{m . m+n}{2n^2} x^{\frac{-m-2n}{n}} \Delta x^2 - \text{u. f.}$$

und folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$d . \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = -\frac{m}{n} x^{\frac{-m-n}{n}} dx = -\frac{m dx}{n \sqrt[n]{x^{m+n}}} = 0.$$

§. 9.

Aus allen bisher angeführten Funktionen, welche Potenzen einer einzigen veränderlichen Grösse sind, erhellt klar und deutlich, dass ihre Differenzialfunktionen

Digitized by Google

nur alsdann mit nöthiger mathematischer Schärfe gefunden werden können, wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse oder Δx gleich Null gesetzt, und folglich die Differenzialfunktion als die einfachste Differenzform angesehen wird. Nach dieser Ansicht bleibt auch alles nicht nur in den Grenzen des Endlichen, sondern es fallen selbst dadurch alle Widersprüche weg, welche die sinnlosen unendlich kleinen Grössen in der höhern Analysis herbeigeführt haben. Ueberdem werden noch die folgenden Betrachtungen die schönsten und einleuchtendsten Beweise abgeben, dass die wahren Grundprincipien der höhern Analysis ganz allein darauf beruhen, dass alle Differenzialfunktionen auf keine andere Weise in nöthiger Strenge entwickelt werden können, als wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse oder Δx der Null gleich angenommen wird.

Die bisherigen Erörterungen geben zugleich auch als eine leichte anschauliche Folge die längst bekannte allgemeine Regel, nach welcher die Differenzialfunktionen aller möglichen Potenzen einer einzigen veränderlichen Grösse kurz und leicht gefunden werden können:

Man multiplicire den Exponenten der Potenz mit der Wurzel, subtrahire von dem Exponenten die Einheit, und multiplicire alsdann alles mit dem Differenzial der Wurzel.

Nach dieser Regel findet man kurz und leicht die Differenzialfunktionen aller bisher aufgestellten Beispiele. So ist:

$$d.x^n = nx^{n-1}dx;\quad d.x^{-n} = -nx^{-n-1}dx = -\frac{n\,dx}{x^{n+1}} = 0.$$

$$d.x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}dx = \frac{m}{n}\,dx\sqrt[n]{x^{m-n}} = 0.$$

$$d.x^{\frac{-m}{n}} = -\frac{m}{n}x^{\frac{-m-n}{n}}dx = -\frac{m\,dx}{\sqrt[n]{x^{m+n}}} = 0 \text{ u.s.f. u.s.f.}$$

gerade so, wie es oben aus den wahren Gründen der Differenzialrechnung ist gefunden worden.

§. 10.

Da alle mögliche rationale Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse aus einer Reihe von Gliedern bestehen, welche nach den Potenzen der veränderlichen Grösse geordnet sind, so werden sich auch ihre Differenzialfunktionen nach den bisherigen Vorschriften mit derselben mathematischen Strenge entwickeln lassen. Folgende Beispiele werden hiervon die nöthigen Beweise geben.

Digitized by Google

$$\Delta(ax+x^2) = a(x+\Delta x) + (x+\Delta x)^2 - (ax+x^2)$$
$$= ax + x^2 + a\Delta x + 2x\Delta x + \Delta x^2 - ax - x^2 = a\Delta x + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= a\,dx + 2x\,dx = (a+2x)\,dx = 0.$$

$$\Delta(ax^2+bx^3-x^4) = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x)^4 - (ax^2+bx^3-x^4)$$
$$= ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + bx^3 + 3bx^2\Delta x + 3bx\Delta x^2 + b\Delta x^3$$
$$- x^4 - 4x^3\Delta x - 6x^2\Delta x^2 - 4x\Delta x^3 - \Delta x^4 - ax^2 - bx^3 + x^4$$
$$= 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + 3bx^2\Delta x + 3bx\Delta x^2 + b\Delta x^3 - 4x^3\Delta x - 6x^2\Delta x^2 - 4x\Delta x^3 - \Delta x^4,$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= 2ax\,dx + 3bx^2dx - 4x^3dx = (2ax + 3bx^2 - 4x^3)\,dx = 0.$$

$$\Delta(x^n - ax^m + cx^p) = (x+\Delta x)^n - a(x+\Delta x)^m + c(x+\Delta x)^p - (x^n - ax^m + cx^p)$$
$$= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 + \text{u. f.}$$
$$- ax^m - max^{m-1}\Delta x - \frac{m.m-1}{1.2}ax^{m-2}\Delta x^2 - \text{u. f.}$$
$$+ cx^p + pcx^{p-1}\Delta x + \frac{p.p-1}{1.2}cx^{p-2}\Delta x^2 + \text{u. f.} - (x^n - ax^m + cx^p)$$
$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 + \text{u.f.} - max^{m-1}\Delta x - \frac{m.m-1}{1.2}ax^{m-2}\Delta x^2 - \text{u.f.}$$
$$+ pcx^{p-1}\Delta x + \frac{p.p-1}{1.2}cx^{p-2}\Delta x^2 + \text{u. f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null geworden ist, das Differenzial

$$= nx^{n-1}dx - max^{m-1}dx + pcx^{p-1}dx = (nx^{n-1} - max^{m-1} + pcx^{p-1})\,dx = 0 \text{ u.s.f. u.s.f.}$$

Man sieht hieraus sehr wohl, dass kurz die Differenzialfunktionen aller möglichen ganzen rationalen Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse gefunden werden, wenn man von jedem Theile nach der im vorigen §. 9. angegebenen Regel das Differenzial sucht, und die gefundenen einzelnen Differenziale mit denselben Zeichen zusammenstellt, welche die Theile der gegebenen Funktion besitzen.

§. 11.

Ganz auf dieselbe Art werden auch alle mögliche Differenzialfunktionen irrationaler Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse entwickelt, wobei aber beständig zum Grunde liegt, dass dies nur mit mathematischer Schärfe geschehen kann, wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse oder Δx gleich Null geworden ist. Folgende Beispiele können zum Beweise dienen:

Digitized by Google

$$\Delta\left(\sqrt[3]{x}-\frac{a}{x^2}\right)=\Delta\left(x^{\frac{1}{3}}-ax^{-2}\right)=(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}-a(x+\Delta x)^{-2}-x^{\frac{1}{3}}+ax^{-2}$$

$$=x^{\frac{1}{3}}+\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x-\tfrac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2+\text{u. f.}-ax^{-2}+2ax^{-3}\Delta x-3ax^{-4}\Delta x^2+\text{u. f.}$$

$$-x^{\frac{1}{3}}+ax^{-2}$$

$$=\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x-\tfrac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2+\text{u. f.}+2ax^{-3}\Delta x-3ax^{-4}\Delta x^2+\text{u. f.}$$

mithin, wenn Δx gleich Null geworden ist, das Differenzial

$$=\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx+2ax^{-3}dx=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2a\,dx}{x^3}=0.$$

$$\Delta\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+bx^2-\frac{c}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\Delta\left(ax^{-\frac{1}{2}}+bx^2-cx^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$=a(x+\Delta x)^{-\frac{1}{2}}+b(x+\Delta x)^2-c(x+\Delta x)^{-\frac{2}{3}}-\left(ax^{-\frac{1}{2}}+bx^2-cx^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$=ax^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}ax^{-\frac{3}{2}}\Delta x+\tfrac{3}{4}ax^{-\frac{5}{2}}\Delta x^2-\text{u. f.}+bx^2+2bx\Delta x+b\Delta x^2$$

$$-cx^{-\frac{2}{3}}+\tfrac{2}{3}cx^{-\frac{5}{3}}\Delta x-\tfrac{5}{9}x^{-\frac{8}{3}}\Delta x^2+\text{u. f.}-ax^{-\frac{1}{2}}-bx^2+cx^{-\frac{2}{3}}$$

$$=-\tfrac{1}{2}ax^{-\frac{3}{2}}\Delta x+\tfrac{3}{4}ax^{-\frac{5}{2}}\Delta x^2-\text{u. f.}+2bx\Delta x+b\Delta x^2+\tfrac{2}{3}cx^{-\frac{5}{3}}\Delta x-\tfrac{5}{9}x^{-\frac{8}{3}}\Delta x^2+\text{u. f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null geworden ist, das Differenzial

$$=-\tfrac{1}{2}ax^{-\frac{3}{2}}dx+2bx\,dx+\tfrac{2}{3}cx^{-\frac{5}{3}}dx=-\frac{a\,dx}{2x\sqrt{x}}+2bx\,dx+\frac{2c\,dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}=0\text{ u. s. f. u. s. f.}$$

§. 12.

Wenn die Wurzeln der Potenzen zwei- oder drei- oder überhaupt vieltheilig seyn sollten, so lassen sich die Differenzialfunktionen solcher Potenzen ebenfalls auf keine andere Art mit mathematischer Evidenz darstellen, als wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse oder Δx gleich Null gesetzt wird, und es fliesst alsdann auch als eine anschauliche Folge hieraus die bereits bekannte und im §. 9. angeführte Regel zur kurzen und leichten Differenzirung solcher Funktionen. Folgende Beispiele geben die genügenden Beweise:

$$\Delta(a+x)^2=[(a+x)+\Delta x]^2=(a+x)^2+2(a+x)\Delta x+\Delta x^2-(a+x)^2$$
$$=2(a+x)\Delta x+\Delta x^2,$$

und folglich, wenn Δx gleich Null wird, das Differenzial

$$=2(a+x)\,dx=0.$$

Digitized by Google

Dasselbe Resultat erhält man kürzer nach der im §. 9. festgestellten Regel.

$$\Delta(a+x^2)^3 = [(a+x^2)+(2x\Delta x+\Delta x^2)]^3 - (a+x^2)^3$$
$$= (a+x^2)^3 + 3(a+x^2)^2(2x\Delta x+\Delta x^2) + 3(a+x^2)(2x\Delta x+\Delta x^2)^2$$
$$+ (2x\Delta x+\Delta x^2)^3 - (a+x^2)^3$$
$$= 3(a+x^2)^2(2x\Delta x+\Delta x^2) + 3(a+x^2)(2x\Delta x+\Delta x^2)^2 + (2x\Delta x+\Delta x^2)^3,$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= 3(a+x^2)^2 . 2x\,dx = 6(a+x^2)^2 x\,dx = 0.$$

$$\Delta(a+x-x^n)^m = [a+x+\Delta x-(x+\Delta x)^n]^m - (a+x-x^n)^m$$
$$= [(a+x-x^n)+(\Delta x-nx^{n-1}\Delta x-\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2-\text{u.f.})]^m-(a+x-x^n)^m$$
$$= (a+x-x^n)^m + m(a+x-x^n)^{m-1}(\Delta x-nx^{n-1}\Delta x-\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2-\text{u.f.})$$
$$+\frac{m.m-1}{1.2}(a+x-x^n)^{m-2}(\Delta x-nx^{n-1}\Delta x-\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2-\text{u.f.})^2+\text{u.f.}-(a+x-x^n)^m$$
$$= m(a+x-x^n)^{m-1}(\Delta x-nx^{n-1}\Delta x-\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2-\text{u.f.})$$
$$+\frac{m.m-1}{1.2}(a+x-x^n)^{m-2}(\Delta x-nx^{n-1}\Delta x-\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2-\text{u.f.})^2+\text{u.f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= m(a+x-x^n)^{m-1}(dx-nx^{n-1}dx)$$
$$= m(a+x-x^n)^{m-1}dx - mn(a+x-x^n)^{m-1}x^{n-1}dx = 0.$$

$$\Delta.\left(\frac{a}{(bx+x^2)^2}\right) = \Delta.a(bx+x^2)^{-2} = a[b(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2]^{-2} - a(bx+x^2)^{-2}$$
$$= a[(bx+x^2)+(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)]^{-2} - a(bx+x^2)^{-2}$$
$$= a(bx+x^2)^{-2} - 2a(bx+x^2)^{-3}(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)$$
$$+ 3a(bx+x^2)^{-4}(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2 - \text{u.f.} - a(bx+x^2)^{-2}$$
$$= -2a(bx+x^2)^{-3}(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)+3a(bx+x^2)^{-4}(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2-\text{u.f.}$$

und folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= -2a(bx+x^2)^{-3}(b\,dx+2x\,dx) = -\frac{2ab\,dx}{(bx+x^2)^3} - \frac{4ax\,dx}{(bx+x^2)^3} = -\frac{2a(b+2x)\,dx}{(bx+x^2)^3} = 0.$$

welches nach der angeführten Regel kürzer gefunden wird.

§. 13.

Wenn die gegebenen Funktionen Produkte aus zwei oder mehreren einfachen oder zusammengesetzten Faktoren sind, welche selbst wieder Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse; so können ihre Differenzialfunktionen ebenfalls auf keine andere Weise mit mathematischer Evidenz gefunden werden, als wenn in den allgemeinen

Digitized by Google

Differenzfunktionen die Differenz der veränderlichen Grösse gleich Null gesetzt wird. Beweise geben folgende Beispiele:

$$\Delta(a+x)(b+x) = [a+(x+\Delta x)][b+(x+\Delta x)] - (a+x)(b+x)$$
$$= [(a+x)+\Delta x][(b+x)+\Delta x)] - (a+x)(b+x)$$
$$= (a+x)(b+x) + (a+x)\Delta x + (b+x)\Delta x + \Delta x^2 - (a+x)(b+x)$$
$$= (a+x)\Delta x + (b+x)\Delta x + \Delta x^2,$$

und daher, wenn Δx gleich Null angenommen wird, das Differenzial

$$= (a+x)\,dx + (b+x)\,dx = 0.$$

$$\Delta(ax+bx^2)(cx+ex^3) =$$
$$= [a(x+\Delta x)+b(x+\Delta x)^2][c(x+\Delta x)+e(x+\Delta x)^3] - (ax+bx^2)(cx+ex^3)$$
$$= [(ax+bx^2)+(a\Delta x+2bx\Delta x+b\Delta x^2)]\times$$
$$\times[(cx+ex^3)+(c\Delta x+3ex^2\Delta x+3ex\Delta x^2+e\Delta x^3)] - (ax+bx^2)(cx+ex^3)$$
$$= (ax+bx^2)(cx+ex^3) + (ax+bx^2)(c\Delta x+3ex^2\Delta x+3ex\Delta x^2+e\Delta x^3)$$
$$+ (cx+ex^3)(a\Delta x+2bx\Delta x+b\Delta x^2)$$
$$+ (a\Delta x+2bx\Delta x+b\Delta x^2)(c\Delta x+3ex^2\Delta x+3ex\Delta x^2+e\Delta x^3) - (ax+bx^2)(cx+ex^3)$$
$$= (ax+bx^2)(c\Delta x+3ex^2\Delta x+3ex\Delta x^2+e\Delta x^3) + (cx+ex^3)(a\Delta x+2bx\Delta x+b\Delta x^2)$$
$$+ (a\Delta x+2bx\Delta x+b\Delta x^2)(c\Delta x+3ex^2\Delta x+3ex\Delta x^2+e\Delta x^3),$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= (ax+bx^2)(c\,dx+3ex^2\,dx) + (cx+ex^3)(a\,dx+2bx\,dx) = 0.$$

$$\Delta\left(\frac{1}{x}\sqrt{(ax+x^2)}\right) = \Delta\left(x^{-1}(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= (x+\Delta x)^{-1}[a(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2]^{\frac{1}{2}} - x^{-1}(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= [x^{-1}-x^{-2}\Delta x+x^{-3}\Delta x^2-\text{u. f.}][(ax+x^2)+(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2]^{\frac{1}{2}} - (x^{-1}(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= [x^{-1}-(x^{-2}\Delta x - x^{-3}\Delta x^2 + \text{u. f.})]\left[(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$+\tfrac{1}{2}(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2) - \tfrac{1}{8}(ax+x^2)^{-\frac{3}{2}}(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2 + \text{u. f.}\left.\right]$$
$$- x^{-1}(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= x^{-1}(ax+x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^{-1}(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)$$
$$-\tfrac{1}{8}x^{-1}(ax+x^2)^{-\frac{3}{2}}(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2+\text{u. f.} - (x^{-2}\Delta x - x^{-3}\Delta x^2+\text{u.f.})(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\tfrac{1}{2}(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}(x^{-2}\Delta x - x^{-3}\Delta x^2+\text{u.f.})(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)$$
$$+\tfrac{1}{8}(ax+x^2)^{-\frac{3}{2}}(x^{-2}\Delta x - x^{-3}\Delta x^2+\text{u.f.})(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2+\text{u.f.} - x^{-1}(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Digitized by Google

$$= \tfrac{1}{2}x^{-1}(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2) - \tfrac{1}{2}x^{-1}(ax+x^2)^{-\frac{3}{2}}(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2 + \text{u. f.}$$

$$-(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}(x^{-2}\Delta x - x^{-3}\Delta x^2 + \text{u. f.})$$

$$-\tfrac{1}{2}(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}(x^{-2}\Delta x - x^{-3}\Delta x^2 + \text{u. f.})\,(a\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2) + \text{u. f.}$$

mithin, wenn Δx gleich Null genommen wird, das Differenzial

$$= \tfrac{1}{2}x^{-1}(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}(a\,dx+2x\,dx) - (ax+x^2)^{\frac{1}{2}}x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{a\,dx+2x\,dx}{2x\sqrt{(ax+x^2)}} - \frac{dx\sqrt{(ax+x^2)}}{x^2} = 0,$$

und wenn alles unter einerlei Nenner gebracht wird

$$\frac{ax\,dx+2x^2\,dx-2ax\,dx-2x^2\,dx}{2x^2\sqrt{(ax+x^2)}} = \frac{-a\,dx}{2x\sqrt{(ax+x^2)}} = 0 \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

Hieraus ergiebt sich zugleich als eine richtige Folge die bekannte Regel, nach welcher die Differenzialfunktion eines Produktes, welches aus zwei oder mehreren Faktoren zusammengesetzt ist, kurz und leicht gefunden wird:

Man nehme von jedem Faktor das Differenzial, multiplicire dasselbe mit den übrigen Faktoren und setze alsdann die daher entstandenen Produkte durch die Addition zusammen.

Nach dieser Regel findet man also kurz und leicht

$$d.(ax+bx^2)(cx+ex^3) = (ax+bx^2)(c\,dx+3ex^2\,dx)+(cx+ex^3)(a\,dx+2bx\,dx) = 0.$$

gerade so, wie es nach den Grundprincipien der Differenzialrechnung ist entwickelt worden.

§. 14.

Wären die gegebenen Funktionen solche Produkte, deren Faktoren Potenzen einer einzigen veränderlichen Grösse sind, so lassen sich auch ihre Differenzialfunktionen unter keiner andern Bedingung mit gehöriger mathematischer Schärfe bestimmen, als wenn in der allgemeinen Differenzform die Differenz der veränderlichen Grösse oder Δx gleich Null geworden ist. Beweise hiervon geben folgende Beispiele:

$$\Delta(a+x)^2(bx+x^2)^3 = [a+(x+\Delta x)]^2[b(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2]^3 - (a+x)^2(bx+x^2)^3$$

$$= [(a+x)+\Delta x]^2[(bx+x^2)+(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)]^3 - (a+x)^2(bx+x^2)^3$$

$$= [(a+x)^2+2(a+x)\Delta x+\Delta x^2)]\,[(bx+x^2)^3+3(bx+x^2)^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)$$

$$+3(bx+x^2)(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2+(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^3] - (a+x)^2(bx+x^2)^3$$

$$= (a+x)^2(bx+x^2)^3+3(a+x)^2(bx+x^2)^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)$$

$$+3(a+x)^2(bx+x^2)(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2+(a+x)^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^3$$

$$+2(a+x)\Delta x(bx+x^2)^3+6(a+x)\Delta x(bx+x^2)^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)$$

$$+6(a+x)\Delta x(bx+x^2)(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2+2(a+x)\Delta x(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^3$$

Digitized by Google

$$+(bx+x^2)^3\,\Delta x^2+3(bx+x^2)^2\,\Delta x^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)$$
$$+3(bx+x^2)\Delta x^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2+\Delta x^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^3-(a+x)^2(bx+x^2)^3$$
$$=3(a+x)^2(bx+x^2)^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)+3(a+x)^2(bx+x^2)(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2$$
$$+(a+x)^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^3+2(a+x)\Delta x(bx+x^2)^3$$
$$+6(a+x)\Delta x(bx+x^2)^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)+6(a+x)\Delta x(bx+x^2)(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2$$
$$+2(a+x)\Delta x(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^3+(bx+x^2)^3\Delta x^2$$
$$+3(bx+x^2)^2\Delta x^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)+3(bx+x^2)\Delta x^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^2$$
$$+\Delta x^2(b\Delta x+2x\Delta x+\Delta x^2)^3$$

und folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$=3(a+x)^2(bx+x^2)^2(b\,dx+2x\,dx)+2(a+x)(bx+x^2)^3\,dx=0.$$

$$\Delta(ax-x^2)^2(b+x)^4=[a(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^2]^2[b+(x+\Delta x)]^4-(ax-x^2)^2(b+x)^4$$
$$=[(ax-x^2)+(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)]^2[(b+x)+\Delta x)]^4-(ax-x^2)^2(b+x)^4$$
$$=[(ax-x^2)^2+2(ax-x^2)(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)+(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2]\times$$
$$\times[(b+x)^4+4(b+x)^3\Delta x+6(b+x)^2\Delta x^2+4(b+x)\Delta x^3+\Delta x^4)]-(ax-x^2)^2(b+x)^4$$
$$=(ax-x^2)^2(b+x)^4+4(ax-x^2)^2(b+x)^3\Delta x+6(ax-x^2)^2(b+x)^2\Delta x^2$$
$$+4(ax-x^2)^2(b+x)\Delta x^3+(ax-x^2)^2\Delta x^4+2(ax-x^2)(b+x)^4(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)$$
$$+8(ax-x^2)(b+x)^3\Delta x(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)+12(ax-x^2)(b+x)^2\Delta x^2(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)$$
$$+8(ax-x^2)(b+x)\Delta x^3(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)+2(ax-x^2)(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)\Delta x^4$$
$$+(b+x)^4(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2+4(b+x)^3\Delta x(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2$$
$$+6(b+x)^2\Delta x^2(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2+4(b+x)\Delta x^3(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2$$
$$+\Delta x^4(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2-(ax-x^2)^2(b+x)^4$$
$$=4(ax-x^2)^2(b+x)^3\Delta x+6(ax-x^2)^2(b+x)^2\Delta x^2+4(ax-x^2)^2(b+x)\Delta x^3$$
$$+(ax-x^2)^2\Delta x^4+2(ax-x^2)(b+x)^4(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)$$
$$+8(ax-x^2)(b+x)^3\Delta x(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)+12(ax-x^2)(b+x)^2\Delta x^2(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)$$
$$+8(ax-x^2)(b+x)\Delta x^3(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)+2(ax-x^2)\Delta x^4(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)$$
$$+(b+x)^4(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2+4(b+x)^3\Delta x(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2$$
$$+6(b+x)^2\Delta x^2(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2+4(b+x)\Delta x^3(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2$$
$$+\Delta x^4(a\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2)^2$$

und daher, wenn Δx gleich Null angenommen wird, das Differenzial

$$=4(ax-x^2)^2(b+x)^3dx+2(ax-x^2)(b+x)^4(a\,dx-2x\,dx)=0$$

u. s. f. u. s. f.

Aus diesen Entwickelungen sieht man deutlich, dass die Differenzialfunktionen solcher Produkte, deren Faktoren Potenzen von zwei- oder mehrtheiligen Wurzeln sind, kurz und leicht aus den in §. 9. und §. 13. angegebenen Regeln gefunden werden können. Hiernach findet man nämlich:

Digitized by Google

$d(ax-x^2)^2(b+x)^4 = 4(ax-x^2)^2(b+x)^3dx+2(ax-x^2)(b+x)^4(adx-2xdx) = 0,$
gerade wie vorhin aus den Grundprincipien ist entwickelt worden.

§. 15.

Was die gebrochenen rationalen und irrationalen Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse betrifft, so ist schon bei mehreren dergleichen gezeigt worden, wie ihre Differenzialfunktionen bestimmt werden. Man hat aber noch eine andere allgemeine Methode, die Differenzialfunktionen aller möglichen gebrochenen Funktionen zu finden, welche sich auf dieselben Principien gründet, die bei den bisherigen Entwickelungen der Differenzialfunktionen sind zum Grunde gelegt worden. Es sollen zuerst solche Beispiele gewählt werden, wo der Zähler eine beständige Grösse ist.

$$\Delta.\frac{1}{x} = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-\Delta x}{x^2+x\Delta x},$$

und daher, wenn Δx gleich Null ist, das Differenzial

$$d.\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2} = 0,$$

wie bereits oben auf einem andern Wege ist gefunden worden (§. 7.).

$$\Delta.\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2} - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{x^2-x^2-2x\Delta x-\Delta x^2}{x^4+2x^3\Delta x+x^2\Delta x^2} = \frac{-2x\Delta x-\Delta x^2}{x^4+2x^3\Delta x+x^2\Delta x^2},$$

mithin, wenn Δx gleich Null genommen wird, das Differenzial

$$d.\frac{1}{x^2} = \frac{-2xdx}{x^4} = -\frac{2dx}{x^3} = 0, \text{ wie oben (§. 7.).}$$

$$\Delta.\frac{1}{x^n} = \frac{1}{(x+\Delta x)^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2+\text{u. f.}} - \frac{1}{x^n}$$

$$= \frac{x^n-x^n-nx^{n-1}\Delta x-\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2-\text{u. f.}}{x^{2n}+nx^{2n-1}\Delta x+\frac{n.n-1}{1.2}x^{2n-2}\Delta x^2+\text{u. f.}}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}\Delta x-\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2-\text{u. f.}}{x^{2n}+nx^{2n-1}\Delta x+\frac{n.n-1}{1.2}x^{2n-2}\Delta x^2+\text{u. f.}}$$

und folglich, wenn Δx gleich Null genommen wird, das Differenzial

$$d.\frac{1}{x^n} = \frac{-nx^{n-1}dx}{x^{2n}} = -\frac{ndx}{x^{n+1}} = 0, \text{ wie ebenfalls oben (§. 7.).}$$

Digitized by Google

$$\Delta.\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}=\Delta.\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}}-\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\Delta x-\frac{1}{9}x^{-\frac{4}{3}}\Delta x^2+\text{u. f.}}-\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{ax^{\frac{2}{3}}-ax^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}}\Delta x+\frac{1}{9}ax^{-\frac{4}{3}}\Delta x^2-\text{u. f.}}{x^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}\Delta x-\frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x^2+\text{u. f.}}$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}}\Delta x+\frac{1}{9}ax^{-\frac{4}{3}}\Delta x^2-\text{u. f.}}{x^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}\Delta x-\frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x^2+\text{u. f.}}$$

und folglich, wenn Δx gleich Null geworden ist, das Differenzial

$$=\frac{-\frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}}dx}{x^{\frac{4}{3}}}=\frac{-2adx}{3x\sqrt[3]{x^2}}=0,$$

wie ebenfalls oben (§. 7.) ist gefunden worden.

Es ergiebt sich also hieraus bei solchen rationalen und irrationalen gebrochenen Funktionen, deren Zähler eine beständige Grösse ist, zur Erfindung ihrer Differenzialfunktionen als richtige Folge folgende leichte und längst bekannte Regel:

Man multiplicire den Zähler mit dem Differenzial des Nenners, dividire dieses Produkt durch das Quadrat des Nenners, und nehme den daher entstandenen Quotienten negativ.

Nach dieser Regel findet man also kurz:

$$\text{d.}\frac{a}{\sqrt[m]{x^n}}=\text{d.}\frac{a}{x^{\frac{n}{m}}}=\frac{-\frac{n}{m}ax^{\frac{n-m}{m}}dx}{x^{\frac{2n}{m}}}=\frac{-nadx}{mx^{\frac{n+m}{m}}}=\frac{-nadx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}=0.$$

§. 16.

Wenn in gebrochenen rationalen und irrationalen Funktionen so wol die Zähler als auch die Nenner eine veränderliche Grösse enthalten, so lassen sich ihre Differenzialfunktionen gleichfalls nur anschaulich finden, wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse (Δx) der Null gleich gesetzt wird. Beweise geben folgende Beispiele:

$$\Delta.\frac{x}{a^2+x^2}=\frac{x+\Delta x}{a^2+(x+\Delta x)^2}-\frac{x}{a^2+x^2}=\frac{x+\Delta x}{a^2+x^2+2x\Delta x+\Delta x^2}-\frac{x}{a^2+x^2}$$

Digitized by Google

$$= \frac{a^2x+x^3+a^2\Delta x+x^2\Delta x-a^2x-x^3-2x^2\Delta x-x\Delta x^2}{a^4+a^2x^2+2a^2x\Delta x+a^2\Delta x^2+a^2x^2+x^4+2x^3\Delta x+x^2\Delta x^2}$$

$$= \frac{a^2\Delta x-x^2\Delta x-x\Delta x^2}{a^4+2a^2x^2+x^4+2a^2x\Delta x+a^2\Delta x^2+2x^3\Delta x+x^2\Delta x^2}$$

mithin, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= \frac{a^2dx-x^2dx}{a^4+2a^2x^2+x^4} = \frac{(a^2-x^2)dx}{(a^2+x^2)^2} = 0.$$

$$\Delta . \frac{\sqrt[3]{(a^2+x^2)}}{a^2-x^2} = \Delta . \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}}{a^2-x^2} = \frac{[a^2+(x+\Delta x)^2]^{\frac{1}{3}}}{a^2-(x+\Delta x)^2} - \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}}{a^2-x^2}$$

$$= \frac{[(a^2+x^2)+(2x\Delta x+\Delta x^2)]^{\frac{1}{3}}}{a^2-x^2-2x\Delta x-\Delta x^2} - \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}}{a^2-x^2}$$

$$= \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{-\frac{2}{3}}(2x\Delta x+\Delta x^2)-\text{u. f.}}{a^2-x^2-(2x\Delta x+\Delta x^2)} - \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}}{a^2-x^2}$$

$$= \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(a^2-x^2)+\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{-\frac{2}{3}}(a^2-x^2)(2x\Delta x+\Delta x^2)-\text{u. f.}}{(a^2-x^2)^2-(a^2-x^2)(2x\Delta x+\Delta x^2)} -$$

$$- \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(a^2-x^2)-(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(2x\Delta x+\Delta x^2)}{(a^2-x^2)^2-(a^2-x^2)(2x\Delta x+\Delta x^2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{-\frac{2}{3}}(a^2-x^2)(2x\Delta x+\Delta x^2)-\text{u. f.}+(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(2x\Delta x+\Delta x^2)}{(a^2-x^2)^2-(a^2-x^2)(2x\Delta x+\Delta x^2)}$$

folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= \frac{\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{-\frac{2}{3}}(a^2-x^2)\,2x\,dx+2(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}x\,dx}{(a^2-x^2)^2}$$

$$= \frac{2(a^2-x^2)x\,dx}{3(a^2-x^2)^2\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2}} + \frac{2x\,dx\sqrt[3]{(a^2+x^2)}}{(a^2-x^2)^2} = 0,$$

und, bringt man alles auf einerlei Nenner,

$$= \frac{2(a^2-x^2)x\,dx+6x\,dx(a^2+x^2)}{3(a^2-x^2)^2\sqrt[3]{(a^2+^2x)^2}}$$

$$= \frac{2a^2x\,dx-2x^3dx+6a^2x\,dx+6x^3dx}{3(a^2-x^2)^2\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2}} = \frac{(8a^2+4x^2)x\,dx}{3(a^2-x^2)^2\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2}} = 0$$

u. s. f. u. s. f.

Digitized by Google

Aus diesen nach wahren Grundprincipien der Differenzialrechnung erfolgten Entwickelungen ergiebt sich als Folge die längst bekannte allgemeine Regel, nach welcher die Differenzialfunktionen aller möglichen rationalen und irrationalen gebrochenen Funktionen kurz und leicht gefunden werden:

Man multiplicire nicht allein das Differenzial des Zählers mit dem Nenner, sondern auch das Differenzial des Nenners mit dem Zähler, subtrahire alsdann vom erstern Produkte das zweite, und dividire die daher entstandene Differenz durch das Quadrat des Nenners.

Nach dieser Regel würde man also kurz finden:

$$d.\frac{x}{a^2+x^2} = \frac{(a^2+x^2)\,dx - 2x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{(a^2-x^2)\,dx}{(a^2+x^2)^2} = 0,$$

gerade so, wie oben aus den Grundprincipien ist entwickelt worden.

§. 17.

Sollten in gebrochenen Funktionen die Zähler und Nenner auch Produkte aus einfachen oder zusammengesetzten Faktoren seyn, oder aus Potenzen von ein- oder vieltheiligen Wurzeln bestehen, so wird es nunmehr keine Schwierigkeit mehr haben, die Differenzialfunktionen mittelst der bisher angegebenen Regeln zu finden, und nach ihren Grundprincipien zu beurtheilen.

Es mögen daher nur ein Paar Beispiele genügen.

$$d.\frac{(a+x)(b+x^2)}{x^2} = \frac{[dx(b+x^2)+2x\,dx(a+x)]\,x^2 - 2x\,dx(a+x)(b+x^2)}{x^4}$$

$$= \frac{dx(b+x^2)+2x\,dx(a+x)}{x^2} - \frac{2\,dx(a+x)(b+x^2)}{x^3} = 0.$$

$$d.\frac{(ax+x^2)^2(bx-x)^3}{(a^2-x^2)^2} = \frac{2(ax+x^2)(bx-x)^3(a^2-x^2)^2(a\,dx+2x\,dx)}{(a^2-x^2)^4} +$$

$$+\frac{3(ax+x^2)^2(bx-x)^2(a^2-x^2)^2(bdx-dx)+2(a^2-x^2)(ax+x^2)^2(bx-x)^3 2x\,dx}{(a^2-x^2)^4}$$

$$= \frac{2(ax+x^2)(bx-x)^3(a+2x)\,dx+3(ax+x^2)(bx-x)^2(b-1)\,dx}{(a^2-x^2)^2} +$$

$$+\frac{4(ax+x^2)^2(bx-x)^3 x\,dx}{(a^2-x^2)^3} = 0 \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

§. 18.

Wenn man alle mögliche algebraische Funktionen, deren Differenzialfunktionen entwickelt werden sollen, einer veränderlichen Grösse gleich setzt, mithin eine Gleichung zwischen einer algebraischen Funktion und der veränderlichen Grösse an-

Digitized by Google

nimmt; so wird auch die Differenzialfunktion dem Differenziale der veränderlichen Grösse gleich seyn. Es sey z. B. $y = a + bx - x^2$, so findet man $dy = (b - 2x)dx = 0$, und folglich $\frac{dy}{dx} = b - 2x = \frac{0}{0}$. Ob ich es gleich kaum nöthig finde zu erinnern, dass dieser Ausdruck: $\frac{0}{0}$ als Quotient alle nur möglich zu gedenkende Werthe in sich fasst, so verdient er doch einer genauern Betrachtung, weil gerade in demselben das Geheimniss liegt, aus welchem die aufgestellten Grundprincipien der Differenzialrechnung sammt ihrer so schönen Anwendung auf Arithmetik, höhere Geometrie, Mechanik, Hydraulik, Maschinenlehre u. s. w. die vollkommenste Bestätigung erhalten, ohne diesen wichtigen Zweig der Mathematik in die Categorie einer künstlichen Nullenrechnung versetzen zu dürfen. Es lehrt schon die gewöhnliche Arithmetik, dass Null durch Null dividirt eine jede gedenkbare Zahl, ja selbst Null, zum Quotienten geben kann, weil der Quotient jedesmal eine Zahl seyn muss, welche mit dem Divisor multiplicirt zum Produkt den Dividend giebt, welches hier bei allen möglichen Zahlen statt findet. Es kann daher $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ sowohl einer beständigen Grösse, als auch irgend einer Funktion einer veränderlichen Grösse, ja selbst der Null, gleich seyn. Der bestimmte Werth für $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ wird aber jederzeit erst gefunden, wenn die gegebene oder gefundene Funktion der veränderlichen Grösse gleich gesetzt, hierauf differenziret, und aus dieser Differenzialfunktion $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ entwickelt wird. Dies lässt sich nun auf keine andere Art anschaulich bewerkstelligen, als wenn man in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse, oder $\triangle x$ der Null gleich setzt, und mithin dy selbst der Null gleich wird. Fände man also umgekehrt aus gewissen bekannten Gründen z. B. aus arithmetischen, aus geometrischen, mechanischen, hydraulischen u. s. f. den Ausdruck $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, so darf derselbe auch nur als eine allgemeine Form angesehen werden, die jeden möglichen Werth zu erhalten fähig ist, und es kann folglich nur darauf ankommen, welche Funktion derselben zum Grunde liegt. Es sey z. B.

$y = \frac{ax}{b - x^2}$, so hat man $dy = \frac{a(b - x^2)dx + 2ax^2dx}{(b - x^2)^2}$

$= \frac{abdx - ax^2dx + 2ax^2dx}{(b - x^2)^2} = \frac{(b + x^2)adx}{(b - x^2)^2}$ und daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \frac{a(b + x^2)}{(b - x^2)^2}.$$

Digitized by Google

Es sey ferner $y = (a+x)^2 (bx+x^2)^3$, so findet man

$dy = 2(a+x)(bx+x^2)^3 dx + 3(a+x)^2 (bx+x^2)^2 (b+2x) dx = 0$, also

$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 2(a+x)(bx+x^2)^3 + 3(a+x)^2 (bx+x^2)^2 (b+2x)$ u. s. f. u. s. f.

Hieraus erhellt deutlich, dass die bestimmten Werthe von $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ aus den Differenzialfunktionen nicht anders in reiner Anschauung gefunden werden können, als wenn in der allgemeinen Differenzfunktion so wol $\triangle x$ als auch $\triangle y$ gleich Null geworden sind.

In Ansehung der Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ ist zu bemerken, dass dieselbe vor der gleichen $\frac{0}{0}$ einen unverkennbaren Vorzug hat, indem man aus der erstern sogleich ersieht, dass eine Gleichung zwischen einer Funktion von x und der veränderlichen Grösse y statt findet, vermittelst welcher durch Differenzirung der bestimmte Werth von $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ erhalten wird. Ueberdies gewinnt man dadurch auch den Vortheil, dass man mit dy und dx wie mit andern Grössen die gewöhnlichen algebraischen Operationen vorzunehmen im Stande ist, ohne dadurch eine Verwirrung zu befürchten, welche gewiss entstehen würde, wenn man statt dy und dx Nullen setzen wollte.

§. 19.

Es lässt sich also im Allgemeinen $\frac{dy}{dx} = A$ annehmen, wo A so wol eine beständige Grösse, als auch eine jede gedenkbare algebraische Funktion von x seyn kann, und es hat die Differenzialfunktion die allgemeine Gestalt $dy = A\,dx = 0$. Man mag sich eine algebraische Funktion gedenken, welche man will, so kann ihre Differenzialfunktion allemal auf die allgemeine Form $dy = Adx = 0$ gebracht werden, und man findet daraus jederzeit $\frac{dy}{dx} = A = \frac{0}{0}$, d. h. der Werth von $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ wird jedesmal aus der Differenzialfunktion der gegebenen oder gefundenen algebraischen Funktion bestimmt.

Alle diejenigen Differenzialfunktionen, welche aus den gegebenen algebraischen Funktionen sind entwickelt worden, nennt man die ersten. Hat man hiernächst aus selbigen die Werthe für $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ gefunden, so sieht man auch sehr leicht, dass die allgemeinen Ausdrücke $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{0^2}{0^2}$, $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{0^3}{0^3}$, und überhaupt $\frac{dy^n}{dx^n} = \frac{0^n}{0^n}$ immer andere und andere Werthe erhalten müssen, und dass keinesweges $\frac{0}{0} = \frac{0^2}{0^2} = \frac{0^3}{0^3}$ u. f.

Digitized by Google

gesetzt werden könne. Hat man nämlich $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = A$ gefunden, so wird $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{0.0}{0.0}$ $= A.A = \frac{0^2}{0^2}$, $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{0^3}{0^3} = A^3$, und überhaupt $\frac{dy^n}{dx^n} = A^n = \frac{0^n}{0^n}$ werden d. h. wenn Null durch Null dividirt den Quotienten A giebt, so muss nothwendig 0^2 durch 0^2 den Quotienten A^2 u. s. f. geben. Ueberhaupt sind aber die Ausdrücke $\frac{dy^2}{dx^2}$, $\frac{dy^3}{dx^3}$, .. $\frac{dy^n}{dx^n}$ ganz allgemeine Formen, welche alle mögliche Werthe annehmen können, und ihre bestimmten Werthe aus der Differenzialfunktion der gegebenen oder gefundenen algebraischen Funktion erhalten. Ist z. B.

$y = \frac{ax}{b+x}$, so findet man $dy = \frac{a\,dx(b+x) - a\,x\,dx}{(b+x)^2} = 0$, und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \frac{ab}{(b+x)^2} = A, \text{ mithin}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{0^2}{0^2} = \frac{a^2b^2}{(b+x)^4} = A^2,$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{0^3}{0^3} = \frac{a^3b^3}{(b+x)^6} = A^3 \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

Anmerkung. Ich glaube streng und klar erwiesen zu haben, dass man bei dem bisherigen Geschäft des Differenzirens zur Begründung desselben gar keiner unendlichen Grössen bedarf. Da aber fast in allen Versuchen über die Festsetzung der wahren Gründe der Differenzialrechnung die unendlich kleinen Grössen bis auf unsre Zeiten die wichtigste Rolle gespielt haben, so finde ich für nöthig, hierüber noch einige Bemerkungen zu machen. *Euler* (*institut. calculi differentialis etc. Cap. III. de infinitis atque infinite parvis*) hatte ganz richtig die Differenzialfunktion als die einfachste Differenzfunktion betrachtet, in welcher die Differenz der veränderlichen Grösse oder Δx gleich Null geworden ist, und setzte daher auch $dx = 0$. Allein er nahm $dx = 0$ als eine unendlich kleine Grösse an, und verdunkelte dadurch die wahren Grundprincipien der Differenzialrechnung, welche unter seiner Meisterhand gewiss das hellste Licht erhalten haben würde, wenn er die missliche Idee vom Unendlichkleinen aufgegeben hätte. Diese verleitete ihn aber zu mehreren sinnlosen Behauptungen. So sollten dx^2, dx^3, dx^4 ... dx^n ebenfalls $= 0$ seyn, und benannte dx^2 unendlich unendlichmal kleiner als dx, dx^3 unendlich unendlich unendlichmal kleiner als dx, und glaubte dadurch kleinere Grade von unendlich kleinen Grössen bewiesen zu haben. Viele andere verstanden dagegen unter unendlich kleinen Grössen solche, welche kleiner sind, als jede noch so kleine angebliche Grösse, und setzten daher dx nicht streng der Null gleich. Nach dieser Voraussetzung kommt man aber ebenfalls auf grosse Schwierigkeiten. Wenn z. B. $y = a + bx$ wäre, so findet man $dy = b\,dx$, und es müsste folglich die beständige Zahl b mit der unendlich kleinen Grösse dx multiplicirt ein Produkt geben, welches einer unendlich kleinen Grösse dy gleich seyn müsste, offenbar etwas Ungereimtes.

Digitized by Google

§. 20.

Ausser den ersten Differenzialfunktionen finden auch noch zweite, dritte und überhaupt höhere Differenzialfunktionen statt, welche aus den ersten, zweiten, dritten u. f. Differenzialfunktionen nach denselben Regeln, wie die ersten, gesucht werden. Man bezeichnet die zweiten, dritten und höhern Differenz- und Differenzialfunktionen mit $\Delta^2 x$, $d^2 x$, $\Delta^3 x$, $d^3 x$, ... $\Delta^n x$, $d^n x$. Bekanntermaassen lassen sich die Differenzen aller möglichen algebraischen Funktionen auf die allgemeine Form bringen:

$$\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 + E\Delta x^5 + \text{u. f.}$$

wo A, B, C, D, E u. f. lauter Funktionen von x sind. Dividirt man diese allgemeine Form auf beiden Seiten durch Δx, so ergiebt sich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + E\Delta x^4 + \text{u. f.}$$

und folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das erste Differenzial

$$\frac{dy}{dx} = A = \frac{0}{0}.$$

Die allgemeine Form der zweiten Differenz ist:

$$\Delta^2 y = F\Delta x^2 + G\Delta x^3 + H\Delta x^4 + I\Delta x^5 + \text{u. f.}$$

und man findet, wenn mit Δx^2 auf beiden Seiten dividirt wird:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = F + G\Delta x + H\Delta x^2 + I\Delta x^3 + \text{u. f.}$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das zweite Differenzial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F = \frac{^2 0}{0^2}.$$

Man sieht nun leicht, dass die allgemeine Gestalt des dritten Differenzials $\frac{d^3 y}{dx^3} = Q = \frac{^3 0}{0^3}$, und überhaupt die des nten Differenzials

$$\frac{d^n y}{dx^n} = S = \frac{^n 0}{0^n} \text{ seyn müsse.}$$

§. 21.

Hieraus ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass die zweite Differenzialfunktion gefunden wird, wenn man die erste Differenzialfunktion von neuem differenzirt, die dritte, wenn man die zweite differenzirt u. s. w. Denn wenn $dy = A\,dx = 0$ wieder differenziret wird, so findet man $dA = F\,dx = 0$, mithin $d^2 y = F\,dx^2 = {}^2 0$; differenzirt man abermals, so erhält man $dF = Q\,dx = 0$, und daher $d^3 y = Q\,dx^3 = {}^3 0$. Auf diese Weise kann man mit dem Differenziren fortfahren, wodurch alle höhere Differenzialfunktionen eben so, wie die ersten, gefunden werden, weil A, F, Q u. f. lauter Funktionen von x sind. Fände man beim Fortfahren des Differenzirens, dass

Digitized by Google

von A, F, Q u. f. einer eine beständige Grösse würde, so giebt dies zu erkennen, dass kein höheres Differenzial mehr statt findet. Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Es sey $y = x^3$, so findet man

das erste Differenzial $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = \frac{0}{0}$

das zweite — $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = \frac{^20}{0^2}$

das dritte — $\frac{d^3y}{dx^3} = 6 = \frac{^30}{0^3}$

das vierte Differenzial ist also nicht mehr möglich.

Ferner sey $y = x^5$, so ergiebt sich

das erste Differenzial $\frac{dy}{dx} = 5x^4 = \frac{0}{0}$

das zweite — $\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 = \frac{^20}{0^2}$

das dritte — $\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 = \frac{^30}{0^3}$

das vierte — $\frac{d^4y}{dx^4} = 120x = \frac{^40}{0^4}$

das fünfte — $\frac{d^5y}{dx^5} = 120 = \frac{^50}{0^5}$

Ferner sey $y = \frac{1}{x}$, so hat man

das erste Differenzial $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = \frac{0}{0}$

das zweite — $\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{2}{x^3} = \frac{^20}{0^2}$

das dritte — $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6}{x^4} = \frac{^30}{0^3}$ u. s. f.

Endlich sey $y = \frac{ax}{a^2 - x^2}$, so wird

das erste Differenzial $\frac{dy}{dx} = \frac{a(a^2-x^2)+2ax^2}{(a^2-x^2)^2} = \frac{a^3+ax^2}{(a^2-x^2)^2} = \frac{0}{0}$

das zweite — $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2ax(a^2-x^2)+4x(a^3+ax^2)}{(a^2-x^2)^3} = \frac{2ax(3a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^3} = \frac{^20}{0^2}$

u. s. f. u. s. f.

Digitized by Google

Es ist hieraus klar, dass die Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}\ldots\frac{d^ny}{dx^n}$ alle mögliche Werthe, selbst den Werth Null, erhalten können, und ihr bestimmter Werth nur von derjenigen Funktion abhängt, aus deren zweiter, dritter, vierter und überhaupt nter Differenzialfunktion derselbe entwickelt wird. Sind daher aus bekannten Gründen diese Quotienten gefunden worden, so können sie auch nur als allgemeine Formen gelten, die alle mögliche Werthe anzunehmen fähig sind; alsdann aber erst ihre bestimmten Werthe bekommen, wenn zwischen der Funktion von x und der veränderlichen Grösse y die zweite, dritte, vierte, und überhaupt nte Differenzialfunktion ist gesucht worden.

§. 22.

Aus den bisherigen Erörterungen erhellt deutlich und zur Genüge, dass bei der Entwickelung der ersten und höhern Differenzialfunktionen aller möglichen algebraischen Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse gar keine unendlich kleinen Grössen nöthig sind. Vielmehr lassen sich dieselben, ohne der mystischen Begriffe vom Unendlichen zu bedürfen, in der reinsten Anschauung, mithin mit apodiktischer Gewissheit, darstellen, wenn vorausgesetzt wird, dass eine jede Differenzialfunktion bloss die allereinfachste Differenzform der allgemeinen Differenzfunktion ist, in welcher die Differenz der veränderlichen Grösse oder Δx gleich Null geworden ist. Was übrigens die Bezeichnungen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}\ldots\frac{d^ny}{dx^n}$ betrifft, welche statt der an sich gleichen Quotienten $\frac{^20}{0^2}, \frac{^30}{0^3}, \frac{^40}{0^4}\ldots \frac{^n0}{0^n}$ gebraucht werden, so gewähren diese die ausgezeichnesten Vortheile:

1. zeigen sie unmittelbar an, welche veränderliche Grösse in den gegebenen oder gefundenen Funktionen zum Grunde liegt, aus welchen die Differenzialfunktionen entstanden sind.

2. verstatten sie die völlige Freiheit, mit den Ausdrücken d^2y, d^3y, d^ny u. f. dx^2, dx^3, dx^n u. f. unbeschadet der Wahrheit dieselben algebraischen Operationen vorzunehmen, welche bei allen andern Grössen statt finden.

3. dienen sie auch vorzüglich mit Hülfe ihrer Werthe die Funktionen selbst, aus welchen die Differenzialfunktionen sind entwickelt worden, d. h. ihre Integrale, wieder zu finden.

§. 23.

Eine vorzüglich schöne Anwendung der Differenzialrechnung findet in einer leichten, kurzen und einfachen Bestimmung der Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen aller krummen Linien statt, von welchen eine allgemeine Gleichung zwischen einer Funktion von x und einer veränderlichen Grösse y, nämlich der Abscissen und der dazu gehörigen Applikaten, gefunden werden kann. Es sey nämlich

Digitized by Google

für irgend einen Punkt (Fig. 1.) C einer solchen krummen Linie FCA die Linie CD die Tangente, CB = y die auf der Abcissenlinie EH senkrechte Applikate, und die dazu gehörige Abscisse AB = x, so ist DB für den Punkt C der krummen Linie die Subtangente. Es nehme nun die Abscisse AB um das unbestimmte Stück BH = $\triangle x$ zu, so wird auch die Applikate CB um ein unbestimmtes Stück zunehmen. Man errichte nämlich nur aus H die senkrechte Linie HF bis zur krummen Linie, und ziehe durch den Punkt C die Linie CG mit EH parallel, so wird der Zuwachs der Applikate für den Zuwachs der Abscisse der Theil GF = HF — CB = $\triangle y$ seyn. Noch ziehe man durch die beiden Punkte F und C die gerade Linie FE bis sie die Abscissenlinie HE in dem Punkte E schneidet, so wird man dadurch die beiden einander ähnlichen Dreiecke CEB und GCF erhalten. Hieraus ergiebt sich dann

$$FG : CB = GC : BE, \text{ oder}$$

$$\triangle y : y = \triangle x : BE, \text{ mithin } BE = y \cdot \frac{\triangle x}{\triangle y}$$

Je kleiner der Werth von $\triangle x$ angenommen wird, desto kleiner wird auch $\triangle y$, und desto mehr rückt der Durchschnittspunkt E der geraden Linie FE mit der Abscissenlinie dem Punkte D näher. Wird $\triangle x$ völlig Null, so wird auch $\triangle y$ gleich Null, und erst in diesem Falle fällt der Durchschnittspunkt E der geraden Linie EF genau mit D, und daher auch EF mit CD zusammen, folglich erhält man

$$BE = BD = \text{der Subtangente} = y \frac{dx}{dy} = y \cdot \frac{0}{0}.$$

Dieser allgemeine Ausdruck, welcher aus geometrischen Gründen ist hergeleitet worden, giebt deutlich zu erkennen, dass weder die Tangente noch die Subtangente für den Punkt C der krummen Linie möglich ist, wofern nicht so wol $\triangle x$ als auch $\triangle y$ gleich Null geworden ist. Da aber $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ alle mögliche gedenkbare Werthe annehmen kann, so stellt auch der Ausdruck $y \cdot \frac{dx}{dy}$ bloss die allgemeine Form dar, nach welcher der bestimmte Werth von $\frac{dx}{dy}$ für jede besondere krumme Linie aus dem Differenziale ihrer Gleichung entwickelt werden muss; woraus dann klar hervorgeht, dass er auf keine andere Art anschaulich gefunden werden kann, als wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grössen ($\triangle x$ und $\triangle y$) gleich Null geworden ist.

§. 24.

In dem rechtwinklichten Dreiecke CDB ist vermöge des Pythagoräischen Theorems $CD^2 = CB^2 + BD^2$, oder $CD^2 = y^2 \cdot \frac{dx^2}{dy^2} + y^2 = y^2 \left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)$ mithin

$$CD = \text{Tangente} = y \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$$

Digitized by Google

Man findet also auch hier die allgemeine Form, welche zur Berechnung der Tangente für einen Punkt aller möglichen regulairen krummen Linien dient. Um nun den für jede besondere Art der krummen Linien zugehörigen Werth von $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{0^2}{0^2}$ zu finden, muss aus der allgemeinen Gleichung der krummen Linie das Differenzial gesucht, und aus selbigem $\frac{dx^2}{dy^2}$ entwickelt werden, welches unter keiner andern Bedingung in der reinen Anschauung möglich ist, als wenn in der allgemeinen Differenzfunktion so wol $\triangle x$ als auch $\triangle y$ gleich Null geworden ist.

Man ziehe weiter von dem Punkte C die Linie CI auf die Tangente CD senkrecht, bis sie die Abscissenlinie EH in dem Punkte I trifft, so wird CI für den Punkt C die Normale, und IB die Subnormale. Nun hat man in dem rechtwinklichten Dreiecke DCI nach bekannten geometrischen Gründen die Proportion:

$DB : BC = BC : BI$, oder

$y \cdot \frac{dx}{dy} : y = y : BI$, und daher

$BI = y^2 : y \cdot \frac{dx}{dy} = y \cdot \frac{dy}{dx}$ = der Subnormale für den Punkt C.

Auch hat man in dem rechtwinklichten Dreiecke BCI

$CI^2 = BC^2 + BI^2$, oder

$CI^2 = y^2 + y^2 \cdot \frac{dy^2}{dx^2} = y^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$, mithin

$CI = y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ = der Normale für den Punkt C.

Es sind daher ebenfalls nach geometrischen Gründen die allgemeinen Formen zur Bestimmung der Normale und Subnormale für jeden Punkt aller möglichen regulairen krummen Linien gefunden worden. Um also für jede besondere Art der krummen Linien die Werthe $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ und $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{0^2}{0^2}$ zu bestimmen, muss die allgemeine Gleichung derselben differenzirt, und aus dem gefundenen Differenzial die Werthe für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy^2}{dx^2}$ entwickelt werden, welches abermals auf keine andere Art mit mathematischer Evidenz geschehen kann, als wenn in der allgemeinen Differenzfunktion $\triangle x$ und $\triangle y$ gleich Null geworden sind.

§. 25.

Zur Erläuterung sollen die Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen der bekannten Kegelschnitte, als algebraischer regulairer krummer Linien, entwickelt werden. In dem Kreise ist, (die Abscissen, wie hier angenommen ist, vom

Digitized by Google

Scheitelpunkte des Durchmessers an gerechnet,) die allgemeine Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$, wo r der Halbmesser ist. Man erhält also die Differenzialfunktion

$2y\,dy = 2r\,dx - 2x\,dx = 0$, oder $y\,dy = (r-x)\,dx = 0$, und $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x} = \frac{0}{0}$,

mithin die Subtangente $= y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{r-x} = \frac{2rx-x^2}{r-x}$

Ferner ist $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{y^2}{(r-x)^2}$, und $1 + \frac{dx^2}{dy^2} = 1 + \frac{y^2}{(r-x)^2} = \frac{r^2-2rx+x^2+2rx-x^2}{(r-x)^2}$

$= \frac{r^2}{(r-x)^2}$, und daher die Tangente $= y\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)} = y \cdot \frac{r}{r-x} = \frac{r \cdot \sqrt{(2rx-x^2)}}{r-x}$.

Weiter findet man $\frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{y}$, und $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(r-x)^2}{y^2}$,

also ist die Subnormale $= y \cdot \frac{dy}{dx} = r - x$, und die Normale

$= y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = y\sqrt{\left(\frac{y^2+(r-x)^2}{y^2}\right)} = \sqrt{(2rx-x^2+r^2-2rx+x^2)} = \sqrt{r^2} = r$.

Sehr leicht lassen sich diese Linien in Funktionen von y ausdrücken, wenn man aus der allgemeinen Gleichung der Kreislinie den Werth von x in einer Funktion von y sucht, und in die gefundenen Ausdrücke für die Linien substituirt.

§. 26.

Die allgemeine Gleichung für die Parabel, wenn die Abscissen aus dem Scheitelpunkte auf der Hauptaxe genommen werden, und der Parameter durch p ausgedrückt wird, ist $y^2 = px$, und daraus findet man

$p\,dx = 2y\,dy$, und $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$; $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4y^2}{p^2}$, mithin auch $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, und $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2}$.

Daraus ergiebt sich also

die Subtangente $= y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$,

die Tangente $= y\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)} = \frac{y}{p}\sqrt{(p^2+4y^2)} = \frac{\sqrt{px}}{p}\sqrt{(p^2+4px)} = \sqrt{(px+4x^2)}$

die Subnormale $= y \cdot \frac{p}{2y} = \frac{1}{2}p$, und

die Normale $= y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(p^2+4y^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(p^2+4px)}$.

Digitized by Google

§. 27.

Die Gleichung der Ellipse und der Hyperbel, die Abscissen auf der Hauptaxe aus dem Scheitelpunkte angenommen ist:

$y^2 = px \pm \frac{px^2}{a}$, wo p den Parameter und a die Hauptaxe andeutet.

Man findet also

$2ydy = pdx \pm \frac{2pxdx}{a} = \frac{(ap \pm 2px)\,dx}{a}$, mithin

$\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{ap \pm 2px} = \frac{0}{0}$, und $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4a^2y^2}{(ap \pm 2px)^2} = \frac{0^2}{0^2}$;

hieraus erhält man ferner

$\frac{dy}{dx} = \frac{ap \pm 2px}{2ay}$, und $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(ap \pm 2px)^2}{4a^2y^2}$; demnach wird

die Subtangente $= y.\frac{dx}{dy} = \frac{2ay^2}{ap \pm 2px} = \frac{2(pax \pm px^2)}{ap \pm 2px} = \frac{2(ax \pm x^2)}{a \pm 2x} = \frac{(a \pm x)x}{\frac{1}{2}a \pm x}$;

dieser Ausdruck für die Subtangente giebt zu erkennen, dass dabei der Parameter gar nicht in Betracht kommt. Wenn daher über ein und derselben Hauptaxe mehrere Ellipsen und Hyperbeln beschrieben werden, so haben sie alle für einerlei Abscisse auch einerlei Subtangente; und daraus folgt, dass die gesammten Tangenten, welche zur nämlichen Abscisse der verschiedenen Ellipsen und Hyperbeln gehören, in einerlei Punkt der Axe zusammenkommen müssen.

Die Subnormale $= y.\frac{dy}{dx} = \frac{ap \pm 2px}{2a}$ u. s. f. u. s. f.

Die wichtigen Folgen, welche aus diesen Bestimmungen der Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen für die Kegelschnitte gezogen werden können, gehören nicht hierher, und können weitläuftig nachgelesen werden in meinem Grundrisse der gesammten reinen höhern Mathematik, B. II. Leipzig, 1807. §. 175 ff.

§. 28.

Es erhellt nunmehr deutlich und klar, dass die ersten und höhern Differenzialfunktionen aller möglichen algebraischen Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse nach den aufgestellten Principien mit mathematischer Evidenz, ohne irgend einer unendlich kleinen Grösse zu bedürfen, gefunden werden, und dass daraus alle schon längst bekannte Regeln zur kurzen und leichten Bestimmung der Differenzialfunktionen, als sichere und reine Folgen abfliessen. Ausser den algebraischen Funktionen giebt es aber auch transcendente Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse, wohin vorzüglich die Exponentialgrössen und die trigonometrischen Grössen gehören. Bei diesen merkwürdigen und wichtigen Funktionen wird es ebenfalls deutlich

Digitized by Google

hervorgehen, dass ihre Differenzialfunktionen auf keine andere Art mit mathematischer Schärfe entwickelt werden können, als wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse, mithin auch die Differenzialfunktion gleich Null geworden ist. Es soll mit dem Differenziren der Exponentialgrössen der Anfang gemacht werden. Eine Exponentialgrösse heisst eine Potenz, deren Exponent eine veränderliche Grösse ist, wie z. B. $a^x = y$. Es kann aber auch die Wurzel eine veränderliche Grösse, ja der Exponent selbst eine Exponentialgrösse seyn, wie $z^x = y$ und $z^{a^x} = y$ u. s. f. Ist die Wurzel der Exponentialgrösse eine beständige Zahl, wie $a^x = y$, so lässt sich alsdann die beständige Zahl a als die Basis oder Grundzahl eines logarithmischen Systems, und der Exponent x als der Logarithme einer jeden Zahl dieses Systems betrachten. Es sey also $a^x = y$, so hat man $x = ly$, und $dx = d.ly$. Will man nun die Differenzialfunktion von ly bestimmen, so setze man $y + \Delta y$ statt y, und suche die allgemeine Differenzfunktion. Nach den bekannten Lehren über die Bestimmungen der Logarithmen hat man

$$l.(y+\Delta y) = ly + l.\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right) = ly + l.\left(\frac{y+\Delta y}{y}\right)$$

$$= ly + l.(y+\Delta y) - ly = ly + m\left(\frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta y^2}{2y^2} + \frac{\Delta y^3}{3y^3} - \frac{\Delta y^4}{4y^4} + u.\,f.\right)$$

wo m den **Modul**, die **Subtangente**, oder die **beständige Zahl** bedeutet, und es ist daher

$$\Delta.ly = l.(y+\Delta y) - ly = m\left(\frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta y^2}{2y^2} + \frac{\Delta y^3}{3y^3} - \frac{\Delta y^4}{4y^4} + u.\,f.\right)$$

und daher, wenn Δy gleich Null genommen wird, das Differenzial

$$d.ly = \frac{mdy}{y} = 0.$$

Bedeutet m den Modul im natürlichen Logarithmensysteme, wo bekanntlich $m = 1$ ist, so wird

$$d.ly = \frac{dy}{y} = 0 = dx.$$

Wenn man also die Differenzialfunktionen der logarithmischen Grössen im natürlichen Systeme gefunden hat, so lassen sich dieselben in jedem andern Systeme sehr leicht finden, wenn man die im natürlichen Systeme gefundenen mit dem Modul des andern Systems multiplicirt. Es ist daher nur nöthig zu wissen, wie die Differenzialfunktionen der logarithmischen Grössen im natürlichen Systeme gefunden werden. Um sich nicht zu verwirren, sollen die natürlichen Logarithmen durch den kleinen Buchstaben l. und die Logarithmen eines jeden andern Systems durch den deutschen Buchstaben L. ausgedrückt werden.

Digitized by Google

§. 29.

Die Differenzialfunktionen der Logarithmen im natürlichen Systeme können mit mathematischer Evidenz nicht anders gefunden werden, als wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse gleich Null gesetzt wird. Folgende Beispiele geben die besten Beweise:

$\triangle . lx^n = \triangle . lz$, wenn $x^n = z$ gesetzt wird. Nun hat man

$$\triangle . lz = l . (z + \triangle z) - lz = lz + \left(\frac{\triangle z}{z} - \frac{\triangle z^2}{2z^2} + \frac{\triangle z^3}{3z^3} - \text{u. f.}\right) - lz$$

$$= \frac{\triangle z}{z} - \frac{\triangle z^2}{2z^2} + \frac{\triangle z^3}{3z^3} - \frac{\triangle z^4}{4z^4} + \text{u. f.}$$

und folglich, wenn $\triangle z$ gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$d . lz = \frac{dz}{z} = 0.$$

Nun ist aber $dz = n x^{n-1} dx$, also wird

$$d . lz = d . lx^n = \frac{n x^{n-1} dx}{x^n} = \frac{n dx}{x} = 0.$$

Dasselbe Resultat findet man auch aus der Natur der Logarithmen. Man hat nämlich $lx^n = n lx$, also $d . lx^n = n d . lx$, und $d . lx = \frac{dx}{x}$, mithin $d . lx^n = \frac{n dx}{x} = 0$.

$\triangle . l . (a+x) = \triangle . lz$, wenn $z = a + x$ gesetzt wird.

Nun ist $\triangle . lz = \frac{\triangle z}{z} - \frac{\triangle z^2}{2z^2} + \frac{\triangle z^3}{3z^3} - \text{u. f.}$

und folglich, wenn $\triangle z$ gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$= \frac{dz}{z} = 0.$$

Weil nun $dz = dx$ ist, so findet man $d . l . (a+x) = \frac{dx}{a+x} = 0$.

$\triangle . l . (a+x^3) = \triangle . lz$, wenn $z = a + x^3$ angenommen wird.

Nun ist $d . lz = \frac{dz}{z}$, und $dz = 3x^2 dx$, folglich wird $d . l . (a+x^3) = \frac{3x^2 dx}{a+x^3} = 0$.

Ferner sey $\triangle . l . \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = lz$, also $z = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$;

es ist aber $d . lz = \frac{dz}{z}$, und $dz = \frac{dx\sqrt{(a^2+x^2)} - x^2 dx . (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2+x^2}$

Digitized by Google

$$= \frac{(a^2+x^2)\,dx - x^2\,dx}{(a^2+x^2)\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)\sqrt{(a^2+x^2)}} = 0;$$ mithin

$$\frac{dz}{z} = d.l.\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)\sqrt{(a^2+x^2)}} : \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{a^2\,dx}{x(a^2+x^2)} = 0,$$

u. s. f. u. s. f.

Hieraus fliesst als richtige Folge die bekannte Regel, die Differenzialfunktionen logarithmischer Grössen kurz und leicht zu finden:

Man suche von der logarithmischen Grösse das Differenzial, und dividire dasselbe durch die logarithmische Grösse.

Nach dieser Regel lassen sich die Differenzialfunktionen aller logarithmischen Grössen ohne Schwierigkeiten finden, wie noch folgende Beispiele zeigen:

$$d.l.\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)} = d.l.\tfrac{1}{2}(a+x) - d.l.\tfrac{1}{2}(a-x)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{a-x} = \frac{\frac{1}{2}a\,dx - \frac{1}{2}x\,dx + \frac{1}{2}a\,dx + \frac{1}{2}x\,dx}{a^2-x^2} = \frac{a\,dx}{a^2-x^2} = 0.$$

Man setze nämlich $\frac{1}{2}(a+x) = y$ und $\frac{1}{2}(a-x) = z$, so wird

$d.ly = \frac{dy}{y}$ und $d.lz = \frac{dz}{z}$; nun ist aber $dy = \frac{1}{2}dx$ und $dz = -\frac{1}{2}dx$, folglich wird

$d.l.\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)} = \frac{\frac{1}{2}dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{a-x}$, wie nach der Regel ist gefunden worden.

$$d.\tfrac{1}{2}l.\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}+x}{\sqrt{(a^2+x^2)}-x} = \tfrac{1}{2}d.l.[\sqrt{(a^2+x^2)}+x] - \tfrac{1}{2}d.l.[\sqrt{(a^2+x^2)}-x].$$

Man setze $\sqrt{(a^2+x^2)}+x=y$, und $\sqrt{(a^2+x^2)}-x=z$, so ist

$d.ly = \frac{dy}{y}$, und $d.lz = \frac{dz}{z}$, und

$$dy = \tfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x\,dx + dx = \frac{x\,dx + dx\sqrt{(a^2+x^2)}}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

$$dz = \tfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x\,dx - dx = \frac{x\,dx - dx\sqrt{(a^2+x^2)}}{\sqrt{(a^2+x^2)}};$$ hieraus ergiebt sich also

$$\tfrac{1}{2}d.ly - \tfrac{1}{2}d.lz = \frac{\frac{1}{2}dy}{y} - \frac{\frac{1}{2}dz}{z} = \frac{\frac{1}{2}[x\,dx + dx\sqrt{(a^2+x^2)}]}{[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]\sqrt{(a^2+x^2)}} + \frac{\frac{1}{2}[-x\,dx + dx\sqrt{(a^2+x^2)}]}{[-x+\sqrt{(a^2+x^2)}]\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]\,dx}{[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]\sqrt{(a^2+x^2)}} + \frac{\frac{1}{2}[-x+\sqrt{(a^2+x^2)}]\,dx}{[-x+\sqrt{(a^2+x^2)}]\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = 0.$$

u. s. f. u. s. f.

Digitized by Google

§. 30.

Weil die ersten Differenzialfunktionen aller logarithmischen Funktionen insgesammt algebraische Funktionen werden, mithin die allgemeine Form $dy = A\,dx = 0$, und $\frac{dy}{dx} = A = \frac{0}{0}$ erhalten, so lassen sich die höhern Differenzialfunktionen derselben nach denselben Regeln finden, nach welchen die höhern Differenzialfunktionen der algebraischen Funktionen bestimmt werden. Ist z. B.

$y = lx$, so hat man $dy = \frac{dx}{x} = 0$, und

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{0}{0}$; also ferner

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} = \frac{^20}{0^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3} = \frac{^30}{0^3}$

$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{6}{x^4} = \frac{^40}{0^4}$; $\frac{d^4y}{dx^5} = \frac{24}{x^5} = \frac{^40}{0^5}$ u. s. f. u. s. f.

Es sey ferner $y = l.(a+x)$, so ergiebt sich

$dy = \frac{dx}{a+x} = 0$, und $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a+x} = \frac{0}{0}$; daher

$\frac{d^2y}{dx^2} = -(a+x)^2 = \frac{^20}{0^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{2}{(a+x)^3} = \frac{^30}{0^3}$,

$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{6}{(a+x)^4} = \frac{^40}{0^4}$; $\frac{d^4y}{dx^5} = +\frac{24}{(a+x)^5} = \frac{^40}{0^5}$ u. s. f. u. s. f.

§. 31.

Wenn die logarithmischen Funktionen Produkte aus einfachen oder zusammengesetzten Faktoren sind, so weiss man aus den logarithmischen Lehren, dass der Logarithme des Produktes der Summe der Logarithmen aller Faktoren gleich ist. Mithin findet man die Differenzialfunktionen solcher Produkte, wenn man nach der im §. 30. angegebenen Regel von jedem einzelnen logarithmischen Theile das Differenzial sucht, und alsdann alle gefundenen partiellen Differenziale zusammen addirt. Einige Beispiele werden genügen.

$d.l.(xyz) = d.lx + d.ly + d.lz = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0.$

$d.l.\frac{x.y}{z.u} = d.lx + d.ly - d.lz - d.lu = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} - \frac{du}{u} = 0.$

Digitized by Google

$$d.l.[(a+x)^2(x+x^2)^3] = d.l.(a+x)^2 + d.l.(x+x^2)^3$$

$$= \frac{2(a+x)dx}{(a+x)^2} + \frac{3(x+x^2)^2(dx+2xdx)}{(x+x^2)^3}$$

$$= \frac{2dx}{a+x} + \frac{3(dx+2xdx)}{x+x^2} = \frac{2xdx+2x^2dx+3adx+6axdx+3xdx+6x^2dx}{(a+x)(x+x^2)}$$

$$= \frac{5xdx+8x^2dx+3adx+6axdx}{(a+x)(x+x^2)} = 0.$$

$$d.l.x^n.y^m = d.lx^n + d.ly^m = \frac{ndx}{x} + \frac{mdy}{y} = 0.$$

$$d.l.[(a+x)(b+y)(c+z)] = d.l.(a+x) + d.l.(b+y) + d.l.(c+z)$$

$$= \frac{dx}{a+x} + \frac{dy}{b+y} + \frac{dz}{c+z} = 0.$$

$$d.l.\frac{x^n(a+y^m)}{z^r(b+u^p)} = d.lx^n + d.l.(a+y^m) - d.lz^r - d.l.(b+u^p)$$

$$= \frac{ndx}{x} + \frac{my^{m-1}dy}{a+y^m} - \frac{rdz}{z} - \frac{pu^{p-1}du}{b+u^p} = 0,$$

u. s. f. u. s. f.

§. 32.

Sollten auch mit logarithmischen Grössen algebraische Funktionen verbunden, oder selbst logarithmische Grössen mit logarithmischen Grössen multiplicirt worden seyn, so wird man auch ohne Schwierigkeit nach den bisher festgesetzten Regeln die Differenzialfunktionen finden können. Folgende Beispiele werden hiervon die beste Erläuterung geben.

Es soll die Differenzialfunktion von $x^n lx + \frac{1}{n}x^n$ gesucht werden. Man suche von jedem Theile das Differenzial; es ist nämlich

$d.x^n lx = nx^{n-1}lx\,dx + x^n\frac{dx}{x} = nx^{n-1}lx\,dx + x^{n-1}dx$ und $\frac{1}{n}x^n = x^{n-1}dx$; mithin wird

$$d.(x^n lx + \frac{1}{n}x^n) = nx^{n-1}lx\,dx + x^{n-1}dx + x^{n-1}dx = nx^{n-1}lx\,dx + 2x^{n-1}dx = 0.$$

Man soll $d.(lx)^3$ suchen. Man setze $lx = y$, so wird $(lx)^3 = y^3$, und das Differenzial von $y^3 = 3y^2dy$. Es ist aber $dy = \frac{dx}{x}$, mithin wird $d.(lx)^3 = 3(lx)^2.\frac{dx}{x} = 0.$

Es soll das Differenzial von l^2x gesucht werden. Man setze $lx = y$, so wird $l^2x = ly$, und daher $d.l^2x = \frac{dy}{y}$; nun ist aber $dy = \frac{dx}{x}$, also findet man $d.l^2x = \frac{dx}{xlx} = 0.$

Digitized by Google

Man soll das Differenzial von l^3x suchen. Man setze abermals $lx=y$, so wird $l^3x = l^2y$, und daher $d.l^3x = \frac{dy}{y\,ly}$; da nun $dy = \frac{dx}{x}$ ist, so findet man

$$d.l^3x = \frac{dx}{x\,lx\,l^2x} = 0 \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

§. 33.

Es ist nunmehr mit hinreichender Deutlichkeit gezeigt worden, dass auch die Differenzialfunktionen aller möglichen logarithmischen Funktionen nur alsdann mit nöthiger mathematischer Evidenz gefunden werden können, wenn in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse gleich Null geworden ist. Was nun noch die Exponentialgrössen überhaupt betrifft, so lassen sich deren Differenzialfunktionen ebenfalls unter keiner andern Bedingung mit mathematischer Gewissheit entwickeln. Folgende Beispiele liefern die schönsten Beweise:

Es sey $y=a^x$, so erhält man

$y+\Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x.a^{\Delta x}$, und daher $\Delta y = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$

Nun ist aber nach bekannten Regeln

$$a^{\Delta x} = 1 + (la)\Delta x + \frac{(la)^2\Delta x^2}{2} + \frac{(la)^3\Delta x^3}{2.3} + \text{u. f. mithin}$$

$$a^{\Delta x} - 1 = (la)\Delta x + \frac{(la)^2\Delta x^2}{2} + \frac{(la)^3\Delta x^3}{2.3} + \text{u. f. und}$$

$$a^x(a^{\Delta x}-1) = a^x\left[(la)\Delta x + \frac{(la)^2\Delta x^2}{2} + \frac{(la)^3\Delta x^3}{2.3} + \text{u. f.}\right]$$

folglich, wenn Δx gleich Null geworden ist, das Differenzial

$dy = a^x.dx\,la = 0$, und $\frac{dy}{dx} = a^x la = \frac{0}{0}$.

Dasselbe Resultat lässt sich aus der Natur der Logarithmen ableiten. Man hat nämlich

aus $y=a^x$, $ly=x\,la$, mithin $\frac{dy}{y} = dx\,la$, und $dy = y\,dx\,la = a^x dx\,la = 0$,

wie vorhin aus den Grundprincipien der Differenzialrechnung ist gefunden worden. Zugleich fliesst hieraus die längst bekannte Regel zur Differenzirung der Exponentialgrössen:

Man multiplicire die Exponentialgrösse mit dem Differenzial des Exponenten und mit dem Logarithmen der beständigen Zahl.

Ist die beständige Zahl a die Basis des Logarithmensystems, welche im natürlichen Systeme gewöhnlich durch den Buchstaben e angedeutet wird, so ist $le = 1$

Digitized by Google

und mithin das Differenzial von $e^x = e^x dx = 0$. In jedem andern Systeme müsste die Differenzialfunktion der Exponentialgrösse noch mit dem Modul des Systems dividirt werden.

§. 34.

Wenn die Würzel der Exponentialgrösse selbst eine veränderliche Grösse ist, wie z. B. $z = x^y$, so findet man ihre Differenzialfunktion auf eine völlig ähnliche Art. Man hat nämlich

$$z + \Delta z = (x+\Delta x)^{y+\Delta y} = x^{y+\Delta y} + (y+\Delta y)\, x^{y+\Delta y-1}\Delta x + \text{u. s. f.}$$

$$= x^y [x^{\Delta y} + (y+\Delta y)\, x^{\Delta y-1}\Delta x + \text{u. f.}] = x^y [x^{\Delta y} + \frac{(y+\Delta y)}{x} . x^{\Delta y}\Delta x + \text{u. f.}]$$

Nun ist $x^{\Delta y} = 1 + (lx)\Delta y + \frac{(lx)^2 \Delta y^2}{2} + \text{u. f.}$ also wird

$$z + \Delta z = x^y [1 + lx\Delta y + \frac{(lx)^2 \Delta y^2}{2} + \text{u. f.}] \left[\left(\frac{y+\Delta y}{x}\right)\Delta x + \text{u. f.}\right]$$

Nimmt man auf beiden Seiten $z = x^y$ weg, so erhält man

$$\Delta z = x^y lx\Delta y + x^y \frac{(lx)^2 \Delta y^2}{2} + \text{u. f.} + x^y . \frac{y\Delta x}{x} + x^y \frac{\Delta x \Delta y}{x} + \text{u. f.}$$

mithin, wenn Δx, also auch Δy und Δz gleich Null geworden sind, das Differenzial

$$dz = x^y lx\, dy + x^y . \frac{y\, dx}{x} = x^y \left(lx\, dy + \frac{y\, dx}{x}\right) = 0.$$

Dasselbe Resultat findet man auch vermittelst der Natur der Logarithmen. Es ist nämlich, wenn $z = x^y$ ist, $lz = y lx$ und

$$\frac{dz}{z} = lx\, dy + \frac{y\, dx}{x}, \text{ folglich}$$

$$dz = x^y \left(lx\, dy + \frac{y\, dx}{x}\right), \text{ wie vorhin.}$$

Wäre zwar die Wurzel der Exponentialgrösse eine beständige Zahl, der Exponent derselben aber selbst eine Exponentialgrösse mit einer beständigen Wurzel, wie z. B. a^{b^x}, so kann man auf eine ähnliche Art die Differenzialfunktion derselben finden. Es sey nämlich $y = a^{b^x}$. Man setze $b^x = z$, so wird $y = a^z$ und man findet daher $dy = a^z dz la$. Nun ist aber $dz = b^x dx lb$, folglich ergiebt sich $dy = a^{b^x} b^x dx la lb$.

Auch, wenn die Exponentialfunktion diese Form $y = x^{z^q}$ hätte, wo x, z und q veränderliche Grössen sind, wird sich ihre Differenzialfunktion auf ähnliche Weise bestimmen lassen. Man setze nämlich $p = z^q$, so wird

$$y = x^p, \text{ mithin } ly = p lx \text{ und } \frac{dy}{y} = lx\, dp + \frac{p\, dx}{x}, \text{ und } dy = y \left(lx\, dp + \frac{p\, dx}{x}\right).$$

Digitized by Google

Nun ist aber $lp = q\,lz$ und $\frac{dp}{p} = lz\,dq + \frac{q\,dz}{z}$, also $dp = p.\left(lz\,dq + \frac{q\,dz}{z}\right)$.

folglich wird nach gehöriger Substitution

$$dy = x^{z^q} z^q \left(dq\,lx\,lz + \frac{q\,dz\,lx}{z} + \frac{dx}{x}\right).$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann sehr leicht die Differenzialfunktion einer jeden beliebigen Exponentialfunktion gefunden werden.

§. 35.

Was die zweiten, dritten und überhaupt höhern Differenzialfunktionen der Exponentialfunktionen betrifft, so kann es nach den bisherigen Regeln gar nicht mehr schwer seyn, dieselben gehörig zu entwickeln. Es sey $y = e^x$, so ist

das erste Differenzial $dy = e^x dx$, also $\frac{dy}{dx} = e^x = \frac{0}{0}$

das zweite — $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x = \frac{^20}{0^2}$

das dritte — $\frac{d^3y}{dx^3} = e^x = \frac{^30}{0^3}$

das vierte — $\frac{d^4y}{dx^4} = e^x = \frac{^40}{0^4}$ u. s. f.

Es sind also hier alle höhere Differenziale einander gleich.

Es sey ferner $x^x = y$, so hat man $dy = x^x dx\,lx + x^x dx$, also

das erste Differenzial $\frac{dy}{dx} = x^x lx + x^x = \frac{0}{0}$

das zweite — $\frac{d^2y}{dx^2} = x^x (lx)^2 + x^x . \frac{1}{x} + x^x lx + x^x lx + x^x$

$= x^x \left[\frac{1}{x} + (1+lx)^2\right] = \frac{^20}{0^2}$ u. s. f. u. s. f.

§. 36.

Wenn in einem logarithmischen Systeme m der Modul, und $y = a^x$ ist, so hat man $x\,la = ly = x$ und $dx = \frac{m.dy}{y}$ (§. 28). Hieraus findet man $y.\frac{dx}{dy} = m$. In der logarithmischen Linie, deren allgemeine Gleichung $y = a^x$ ist, muss also die Subtangente m eine beständige Grösse seyn. Da die logarithmischen Differenzialfunktionen

Digitized by Google

mit der logarithmischen Linie in der genauesten Verbindung stehn, so soll dieselbe noch hier näher betrachtet werden. Man nehme (Fig. 2.) auf der Abscissenlinie AI einen beliebigen Punkt E zum Anfangspunkt der Abscissen an, und schneide vor- und rückwärts die gleichen Theile EF = FG = GH = HI = ED = DC = CB = BA u. f. ab, errichte alsdann durch alle die Theilungspunkte auf AI die senkrechten Linien EO, FP, GQ, HR, IS, DN, CM, BL, AK u. s. f., so dass sie als Applikaten in einer geometrischen Progression fortschreiten, so lässt sich durch die Endpunkte dieser Applikaten eine krumme Linie zeichnen, welche die logarithmische Linie genannt wird. Setzt man nun EO = 1, so stellen die Abscissen EF, EG, EH, EI u. s. f. die Logarithmen vor, zu welchen die Applikaten FP, GQ, HR, IS, u. f. gehören, und es wird FP die Grundzahl des logarithmischen Systems seyn. Denn die Applikaten bilden nach der Voraussetzung diese geometrische Progression:

EO, FP, GQ, HR, IS u. f.

Nimmt man daher EO = 1 = EF = FG u. f. und FP = a, so gehören zu den

Abscissen EF, EG, EH, EI u. s. f. oder

0, 1, 2, 3, 4 u. f.

die Applikaten EO, FP, GQ, HR, IS u. f. x oder

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ a^x;$$

folglich ist $y = a$, wenn $x = 1$, $y = a^2$, wenn $x = 2$, $y = a^3$, wenn $x = 3$ u. f. ist, und überhaupt $y = a^x$, als die Gleichung für die logarithmische Linie.

Man nehme nun in der logarithmischen Linie irgendwo einen Punkt (Fig. 3.) C an, und für diesen Punkt sey CA die Tangente, PB = x die Abscisse und BC = y die dazu gehörige Applikate, so ist BA die für den Punkt C gehörige Subtangente. Nimmt die Abscisse um das unbestimmte Stück $BE = \Delta x$ zu, so wächst auch die Applikate y um $GF = \Delta y$. Durch die beiden Punkte F und C ziehe man die gerade Linie FD, welche die Abscissenlinie in dem Punkte D schneidet, und durch C die gerade Linie CG mit DE parallel, so erhält man die beiden ähnlichen Dreiecke DBC und CGF, woraus sich diese Proportion ergiebt

FG : CB = CG : DB.

Vermöge der Gleichung für die logarithmische Linie ist $CB = y = a^x$, folglich $EF = y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$, und $GF = EF - CB = \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$; also hat man

$a^x(a^{\Delta x} - 1) : a^x = \Delta x : DB$ oder

$a^{\Delta x} - 1 : 1 = \Delta x : DB$, und man findet

$$DB = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}.$$

Digitized by Google

Es sey für einen andern Punkt H der logarithmischen Linie die Linie HL die Tangente, $PI = x'$ die Abscisse, und $HI = y'$ die dazu gehörige Ordinate; ferner $IO = \Delta x$ der Zuwachs der Abscisse; mithin $NM = \Delta y'$ der Zuwachs der Applikate. Man hat also $IH = a^{x'}$ und $OM = a^{x'+\Delta x}$, und $NM = OM - IH = a^{x'+\Delta x} - a^{x'} = a^{x'}(a^{\Delta x} - 1)$.

Zieht man durch die beiden Punkte M und H die gerade Linie ML, bis sie die Abscissenlinie in dem Punkte L trifft, und aus H die Linie HN mit LO parallel, so ergiebt sich aus den dadurch entstandenen ähnlichen Dreiecken HLI und MHN diese Proportion

$MN : NH = HI : IL$, oder

$a^{x'}(a^{\Delta x} - 1) : a^{x'} = \Delta x : IK$, oder

$a^{\Delta x} - 1 : 1 = \Delta x : IK$, und man findet

$IK = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$, gerade so, wie es für den Punkt C ist gefunden worden.

Hieraus folgt zugleich, dass sich in jedem logarithmischen Systeme die Differenz einer Zahl zur Zahl verhalten müsse, wie die Differenz des Logarithmen zu einer beständigen Zahl, welche von dem Werthe der Basis abhängt.

Wenn beide Δx und Δy gleich Null werden, so fällt CD mit CA und HK mit HL zusammen, folglich wird auch $BD = BA$, und $IK = IL$, und man erhält daher $BA = IL =$ Subtangente $= \frac{dx}{a^{dx} - 1} = \frac{dx}{la\,dx} = \frac{1}{la} =$ einer beständigen Zahl, weil $a^{dx} - 1 = la\,dx$ ist. Diese beständige Zahl hängt aber von der Grundzahl ab. Da nun die allgemeine Form der Tangente für jede krumme Linie der Ausdruck $y\frac{dx}{dy}$ ist, so hat man auch für jeden Punkt in der logarithmischen Linie

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{1}{la} = m = \text{Tangente.}$$

Denselben Ausdruck findet man auch aus dem Differenziale der Exponentialgrösse oder der allgemeinen Gleichung für die logarithmische Linie. Man hat nämlich

$dy = y\,dx\,la$ und daher $y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{la} = m$.

Aus $y \cdot \frac{dx}{dy} = m$ findet man $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{y}$, und $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{m^2}{y^2}$; eben so wird

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{m}$ und $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2}{m^2}$, und es ergiebt sich daher

Digitized by Google

die Tangente $= y\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)} = y\sqrt{\left(1+\frac{m^2}{y^2}\right)} = \sqrt{(y^2+m^2)}$

die Subnormale $= y.\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{m}$, und

die Normale $= y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = y\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{m^2}\right)} = \frac{y}{m}\sqrt{(m^2+y^2)}$.

Man sieht also auch bei der logarithmischen Linie, dass die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale unter keiner andern Bedingung mit gehöriger Evidenz bestimmt werden können, als wenn so wol Δx, als auch Δy gleich Null geworden ist.

§. 37.

Was die trigonometrischen Funktionen betrifft, so lassen sich ihre Differenzialfunktionen mit derselben mathematischen Evidenz entwickeln, wie die der algebraischen, logarithmischen und Exponentialfunktionen, ohne der unendlich kleinen Grössen zu bedürfen, wenn man in der allgemeinen Differenzfunktion die Differenz der veränderlichen Grösse gleich Null setzt, wodurch selbst die ganze Differenzialfunktion der Null gleich wird. Folgende Entwickelungen werden die klarsten Beweise geben.

Es sey $y = \sin x$. Setzt man nun $y + \Delta y$ statt y und $x+\Delta x$ statt x, so erhält man aus bekannten Gründen

$y+\Delta y = \sin(x+\Delta x) = \sin x.\cos.\Delta x + \cos x.\sin.\Delta x$, mithin

$\Delta y = \Delta.\sin x = \sin x.\cos.\Delta x + \cos x.\sin.\Delta x - \sin x.$

Nun ist aber nach bekannten trigonometrischen Lehren

$\cos.\Delta x = 1 - \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} - \text{u. f.}$ und

$\sin.\Delta x = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} - \text{u. f.}$

Daher wird

$\sin x.\cos.\Delta x = \sin x - \sin x\,\frac{\Delta x^2}{1.2} + \sin x.\,\frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} - \text{u. f.}$

$\cos x.\sin.\Delta x = \cos x.\Delta x - \cos x\,\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \cos x\,\frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} - \text{u. f.}$ und folglich

$\Delta y = \Delta.\sin x = \cos x.\Delta x - \sin x\,\frac{\Delta x^2}{1.2} - \cos x\,\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f. u. f.}$

daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$dy = d.\sin x = \cos x.dx = 0$, und $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \cos x.$

Digitized by Google

Dasselbe Resultat findet man auch unmittelbar durch geometrische Betrachtung. Es sey nämlich (Fig. 4.) für den Halbmesser $AC = CB = CF = 1$ der Bogen FBA ein Quadrant, und $AB = x$ ein beliebiger Kreisbogen. Es nehme derselbe um den unbestimmten Theil $BK = \Delta x$ zu, und man ziehe aus den Punkten B und K die Linien BD und KH auf CA senkrecht herab. Ferner ziehe man aus dem Punkte B die Linie BE mit AC parallel, und BI auf CB senkrecht, welche die verlängerte HK in dem Punkte I treffen wird. Für den Bogen $AB = x$ ist $BD = EC = \sin x$, $CD = EB = \cos x$, und $GK = \Delta . \sin x$. Die beiden ähnlichen Dreiecke IBG und BEC geben folgende Proportion:

$$BE : IG = BC : BI, \text{ oder}$$
$$\cos x : IG = 1 : BI.$$

Je kleiner der Bogen $BK = \Delta x$ angenommen wird, desto mehr nähert sich IG der Linie GK, und BI dem Bogen BK und man kann daher setzen:

$\cos x : \Delta . \sin x = 1 : \Delta x$, und man hat

$\Delta . \sin x = \cos x . \Delta x$, folglich, wenn Δx gleich Null angenommen wird, in welchem Falle IH mit BD zusammenfällt das Differenzial

$$dy = d . \sin x = dx . \cos x = 0.$$

Es ist also das Differenzial des Sinus eines Kreisbogens gleich dem Produkte des Differenzials dieses Bogens mit dem Cosinus desselben.

§. 38.

Es sey ferner $y = \cos x$. Hieraus erhält man

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) = \cos x . \cos . \Delta x - \sin x . \sin . \Delta x; \text{ aber}$$

$$\cos x . \cos . \Delta x = \cos x - \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \cos x \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} - \text{u. f. und}$$

$$\sin x \sin . \Delta x = \sin x . \Delta x - \sin x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \sin x \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} - \text{u. f. also wird}$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) = \cos x - \sin x . \Delta x - \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \sin x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}$$

$$\text{und daher } \Delta y = \Delta . \cos x = - \sin x . \Delta x - \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \sin x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}$$

folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$dy = d . \cos x = - dx . \sin x = 0.$$

Digitized by Google

Denselben Differenzialausdruck findet man auch mit Hülfe der geometrischen Figur. Für den Zuwachs (Fig. 4.) $BK = \Delta x$ des Bogens $AB = x$ nimmt auch der Sinus BD um $GK = \Delta . \sin x$ zu; dagegen nimmt der Cosinus $x = CD$ um $DH = BG = \Delta . \cos x$ ab. Nun geben die beiden ähnlichen Dreiecke IGB und EBC folgende Proportion:

$$GB : EC = BI : BC, \text{ oder}$$
$$-\Delta . \cos x : \sin x = BI : BC.$$

Da nun BI dem Bogen $BK = \Delta x$ sich desto mehr nähert, je kleiner derselbe angenommen wird, so kann man in diesem Falle setzen:

$$-\Delta . \cos x : \sin x = \Delta x : 1, \text{ und es wird daher}$$
$$\Delta . \cos x = \Delta y = -\Delta x . \sin x,$$

folglich, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$dy = d . \cos x = -dx . \sin x = 0.$$

Es ist also das Differenzial des Cosinus eines Kreisbogens dem negativen Produkte des Sinus dieses Bogens mit dem Differenziale desselben gleich.

§. 39.

Es sey weiter $y = \text{tang}\, x$. Da nun $\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist, so hat man

$$y + \Delta y = \text{tang}\,(x+\Delta x) = \frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} = \frac{\sin x . \cos . \Delta x + \cos x . \sin . \Delta x}{\cos x . \cos . \Delta x - \sin x . \sin . \Delta x}$$

$$= \frac{\sin x - \sin x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} + \cos x . \Delta x - \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}}{\cos x - \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} - \sin x . \Delta x + \sin x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u. f.}}$$

Wird hiervon $\frac{\sin x}{\cos x}$ subtrahirt, so erhält man

$$\Delta y = \Delta . \text{tang}\, x = \frac{\sin x . \cos x - \sin x . \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u.f.} + \cos x^2 . \Delta x - \cos x^2 \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}}{\cos x^2 - \cos x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u.f.} - \sin x . \cos x . \Delta x + \sin x . \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u.f.}}$$

$$+ \frac{-\sin x . \cos x + \sin x . \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} - \text{u. f.} + \sin x^2 . \Delta x - \sin x^2 \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}}{\cos x^2 - \cos x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} - \sin x . \cos x . \Delta x + \sin x . \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u. f.}}$$

Digitized by Google

$$= \frac{\cos x^2 \Delta x + \sin x^2 \Delta x - \cos x^2 \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \sin x^2 \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}}{\cos x^2 - \cos x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} - \sin x . \cos x . \Delta x + \sin x . \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u. f.}}$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$dy = \text{d. tang } x = \frac{dx(\cos x^2 + \sin x^2)}{\cos x^2} = \frac{dx}{\cos x^2} = 0,$$

weil $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$ ist.

Es ist daher das Differenzial der Tangente eines Kreisbogens dem Differenzial des Kreisbogens durch das Quadrat des Cosinus desselben dividirt gleich.

§. 40.

Es sey $y = \cot x$. Weil nun $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist, so erhält man

$$y + \Delta y = \cot(x + \Delta x) = \frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} = \frac{\cos x . \cos \Delta x - \sin x . \sin \Delta x}{\sin x . \cos \Delta x + \cos x . \sin \Delta x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} - \sin x . \Delta x + \sin x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u. f.}}{\sin x - \sin x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} + \cos x . \Delta x - \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}}$$

subtrahirt man hiervon $\frac{\cos x}{\sin x}$, so ergiebt sich

$$\Delta y = \Delta . \cot x = \frac{\sin x . \cos x - \sin x . \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u.f.} - \sin x^2 \Delta x + \sin x^2 \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u.f.}}{\sin x^2 - \sin x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u.f.} + \sin x . \cos x . \Delta x - \sin x . \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u.f.}}$$

$$\frac{- \cos x . \sin x + \sin x . \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} - \text{u. f.} - \cos x^2 \Delta x + \cos x^2 \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u. f.}}{\sin x^2 - \sin x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} + \sin x . \cos x . \Delta x - \sin x . \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}}$$

$$= \frac{- (\sin x^2 + \cos x^2) \Delta x + \sin x^2 \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u. f.}}{\sin x^2 - \sin x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u.f.} + \sin x . \cos x . \Delta x - \text{u.f.}}$$

mithin, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$dy = \text{d. cot } x = \frac{-(\sin x^2 + \cos x^2) dx}{\sin x^2} = \frac{-dx}{\sin x^2} = 0.$$

Digitized by Google

Es ist also das Differenzial der Cotangente eines Kreisbogens dem Differenziale dieses Kreisbogens negativ genommen, und durch das Quadrat des Sinus dieses Kreisbogens dividirt gleich.

§. 41.

Es sey $\sec x = y$. Da nun $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ist, so findet man

$$y+\Delta y = \sec(x+\Delta x) = \frac{1}{\cos(x+\Delta x)} = \frac{1}{\cos x.\cos.\Delta x - \sin x.\sin.\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\cos x - \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u.f.} - \sin x.\Delta x + \sin x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u.f.}}$$

und hiervon $\frac{1}{\cos x}$ subtrahirt

$$\Delta y = \Delta.\sec x = \frac{\cos x - \cos x + \cos x \frac{\Delta x^2}{1.2} - \text{u.f.} + \sin x.\Delta x - \sin x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u.f.}}{\cos x^2 - \cos x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u.f.} - \sin x.\Delta x + \sin x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u.f.}}$$

und daher, wenn Δx gleich Null gesetzt wird, das Differenzial

$$dy = d.\sec x = \frac{dx.\sin x}{\cos x^2} = 0.$$

Es ist folglich das Differenzial der Sekante eines Kreisbogens dem Differenziale dieses Bogens mit dem Sinus desselben multiplicirt, und durch das Quadrat des Cosinus eben dieses Bogens dividirt gleich.

§. 42.

Es sey ferner $y = \text{cosec}\, x$. Nun ist $\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$, also findet man

$$y+\Delta y = \text{cosec}(x+\Delta x) = \frac{1}{\sin(x+\Delta x)} = \frac{1}{\sin x.\cos.\Delta x + \cos x.\sin.\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sin x - \sin x \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u.f.} + \cos x.\Delta x - \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{u.f.}}$$

und hiervon $\frac{1}{\sin x}$ subtrahirt

Digitized by Google

$$\Delta y = \Delta.\operatorname{cosec}.x = \frac{\sin x - \sin x + \sin x \frac{\Delta x^2}{1.2} - \text{u. f.} - \cos x.\Delta x + \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u. f.}}{\sin x^2 - \sin x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} + \sin x.\cos x.\Delta x - \text{u. f.}}$$

$$= \frac{\sin x \frac{\Delta x^2}{1.2} - \text{u. f.} - \cos x.\Delta x + \cos x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} - \text{u. f.}}{\sin x^2 - \sin x^2 \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{u. f.} + \sin x.\cos x.\Delta x - \text{u. f.}}$$

und folglich, wenn Δx gleich Null geworden ist, das Differenzial

$$dy = d.\operatorname{cosec} x = \frac{-dx.\cos x}{\sin x^2} = 0.$$

Es ist also das Differenzial der Cosekante eines Kreisbogens dem Produkte des Differenzials desselben Bogens negativ genommen, und durch das Quadrat des Sinus dieses Bogens dividirt gleich.

§. 43.

Es sey $y = \operatorname{sinv} x$. Da nun $\operatorname{sinv} x = 1 - \cos x$ ist, so hat man auch

$d.y = d.\operatorname{sinv} x = -d.\cos x$; aber

$d.\cos x = -dx.\sin x$ (§. 38.), also wird

$d.y = d.\operatorname{sinv} x = dx.\sin x = 0.$

Es ist daher das Differenzial des Sinus versus eines Kreisbogens dem Produkte des Differenzials des Bogens mit dem Sinus desselben multiplicirt gleich.

§. 44.

Es sey $y = \operatorname{cosv} x$. Da nun $\operatorname{cosv} x = 1 - \sin x$ ist, so erhält man

$dy = d.\operatorname{cosv} x = -d.\sin x = 0$; aber

$d.\sin x = dx.\cos x$ (§. 37.) $= 0$; also wird

$d.\operatorname{cosv} x = dy = -dx.\cos x = 0$; oder

das Differenzial des Cosinus versus eines Kreisbogens ist dem negativen Produkte des Differenzials dieses Kreisbogens mit dem Cosinus desselben multiplicirt gleich.

§. 45.

Die bisherigen Erörterungen ergeben klar und deutlich, dass die Differenzialfunktionen der trigonometrischen Linien in Funktionen der dazu gehörigen Kreisbogen, mit erforderlicher Evidenz, ohne unendlich kleiner Grössen zu bedürfen, gefun-

Digitized by Google

den werden können. Betrachtet man nun umgekehrt die Kreisbogen als Funktionen der dazu gehörigen trigonometrischen Grössen, so lassen sich auch sehr leicht die Differenziale der Kreisbogen durch Differenzialfunktionen der trigonometrischen Linien anschaulich bestimmen, ohne die mystischen Begriffe von unendlich kleinen Grössen mit ins Spiel zu bringen. Man nehme nämlich an, x sey die vorgegebene Funktion, und y die veränderliche Grösse, von welcher die Funktion von x abhängt. Man setze also:

$y = \sin x$, so ist, wie bekannt $dy = dx . \cos x = 0$.

Da nun $\cos x = \sqrt{(1 - \sin x^2)} = \sqrt{(1 - y^2)}$ ist, so ergiebt sich daraus

$$dy = dx\sqrt{(1-y^2)} = 0, \text{ und daher } dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = 0.$$

Man findet also das Differenzial eines Kreisbogens, dessen Sinus gegeben ist, wenn man das Differenzial des Sinus durch den Cosinus dividirt.

§. 46.

Es sey ferner $y = \cos x$, also $dy = d . \cos x = -\sin x . dx = 0$;

nun ist aber $\cos x = y = \sqrt{(1 - \sin x^2)} = \sqrt{(1 - y^2)}$, also wird

$$dy = -dx\sqrt{(1-y^2)}, \text{ und daher } dx = -\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = 0.$$

Man findet also das Differenzial eines Kreisbogens, dessen Cosinus gegeben ist, wenn man das Differenzial des Cosinus durch den Sinus dividirt, und diesen Quotienten negativ nimmt.

§. 47.

Es sey weiter $y = \text{tang} x$, so weiss man, dass

$dy = d . \text{tang} x = \frac{dx}{\cos x^2} = 0$ ist. Hieraus findet man

$dy . \cos x^2 = dx$. Nun hat man $\text{tang} x = y = \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \frac{\sqrt{(1 - \cos x^2)}}{\cos x}$ und $\text{tang} x^2 = y^2 = \frac{1 - \cos x^2}{\cos x^2}$; also hieraus

$(y^2 + 1) \cos x^2 = 1$, und daher $\cos x^2 = \frac{1}{y^2 + 1}$.

Setzt man diesen Werth statt $\cos x^2$ in die vorige Gleichung

$dy . \cos x^2 = dx = 0$, so erhält man $dx = \frac{dy}{y^2 + 1} = 0$.

Digitized by Google

Es ist also das Differenzial des Kreisbogens, dessen Tangente gegeben ist, dem Differenziale der Tangente durch das Quadrat der Sekante dividirt gleich.

§. 48.

Noch weiter sey $y = \cot x$, so ist, wie bekannt,

$dy = d.\cot x = -\frac{dx}{\sin x^2} = 0$, und hieraus erhält man

$dx = -dy.\sin x^2$. Es ist aber $\cot x = y = \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sqrt{(1-\sin x^2)}}{\sin x}$, und $y^2 = \frac{1-\sin x^2}{\sin x^2}$; woraus man findet

$$(y^2+1)\sin x^2 = 1, \text{ und } \sin x^2 = \frac{1}{y^2+1}.$$

Setzt man diesen Werth statt $\sin x^2$ in die vorige Gleichung, so erhält man

$$dx = \frac{-dy}{y^2+1} = 0.$$

Es ist daher das Differenzial eines Kreisbogens, dessen Cotangente gegeben ist, gleich dem negativen Differenziale der Cotangente durch das Quadrat der Cosekante dividirt.

§. 49.

Es sey ferner $y = \sec x$, so hat man

$dy = d.\sec x = \frac{dx.\sin x}{\cos x^2} = 0$, und hieraus ergiebt sich

$dx = \frac{dy.\cos x^2}{\sin x} = 0$. Es ist aber

$\sec x = y = \frac{1}{\cos x}$, und daher $y.\cos x = 1$ und $\cos x = \frac{1}{y}$;

ferner erhält man aus $\sec x = y = \frac{1}{\cos x}$ auch $y = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin x^2)}}$, und

$y^2 = \frac{1}{1-\sin x^2}$, also $y^2\,(1-\sin x^2) = 1$, und

$\sin x^2 = \frac{y^2-1}{y^2}$, mithin $\sin x = \frac{1}{y}\sqrt{(y^2-1)}$.

Digitized by Google

Setzt man diese Werthe in die vorgefundene Differenzialgleichung, so erhält man

$$dx = \frac{\frac{1}{y^2}.dy}{\frac{1}{y}\sqrt{(y^2-1)}} = \frac{dy}{y\sqrt{(y^2-1)}} = 0.$$

Es ist also das Differenzial eines Kreisbogens, dessen Sekante gegeben ist, dem Differenziale der Sekante dividirt durch das Produkt der Sekante mit der Tangente gleich.

§. 50.

Es sey $y = \text{cosec}\, x$, so hat man, wie bekannt,

$dy = d.\text{cosec}\, x = \frac{-dx.\cos x}{\sin x^2} = 0$, und daraus findet man

$dx = \frac{-dy.\sin x^2}{\cos x} = 0$. Nun ist aber

$\text{cosec}\, x = y = \frac{1}{\sin x}$, also $\sin x = \frac{1}{y}$ und $\sin x^2 = \frac{1}{y^2}$;

ferner findet man auch aus $\text{cosec}\, x = y = \frac{1}{\sqrt{(1-\cos x^2)}}$,

und $y^2 = \frac{1}{1-\cos x^2}$; daraus wird weiter

$y^2(1-\cos x^2) = 1$, und $\cos x^2 = \frac{y^2-1}{y^2}$, oder $\cos x = \frac{1}{y}\sqrt{(y^2-1)}$.

Setzt man diese Werthe gehörig in die vorige Differenzialgleichung, so ergiebt sich

$$dx = \frac{-\frac{1}{y^2}.dy}{\frac{1}{y}\sqrt{(y^2-1)}} = -\frac{dy}{y\sqrt{(y^2-1)}} = 0.$$

Man findet also das Differenzial eines Kreisbogens, dessen Cosekante gegeben ist, wenn man das Differenzial der Cosekante durch das Produkt der Cosekante mit der Cotangente dividirt, und diesen Quotienten negativ nimmt.

§. 51.

Es sey $y = \text{sinv}\, x$, so hat man, wie gefunden worden,

$dy = d.\text{sinv}\, x = dx.\sin x = 0$ (§. 43.), und daraus erhält man $dx = \frac{dy}{\sin x} = 0$;

Digitized by Google

aber $\sin v\, x = y = 1 - \cos x = 1 - \sqrt{(1 - \sin x^2)}$, oder

$1 - y = \sqrt{(1 - \sin x^2)}$ und $1 - 2y + y^2 = 1 - \sin x^2$; also

$\sin x^2 = 2y - y^2$, und $\sin x = \sqrt{(2y - y^2)}$.

Setzt man diesen Werth statt $\sin x$ in die vorige Differenzialgleichung, so erhält man

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(2y - y^2)}} = 0.$$

Es ist also das Differenzial eines Kreisbogens, dessen Quersinus gegeben ist, dem Differenziale des Quersinus durch den Sinus des Bogens dividirt gleich.

§. 52.

Es sey endlich $y = \cos v\, x$, so ist bekannter Maassen

$dy = d.\cos v\, x = -dx.\cos x = 0$, und daraus erhält man

$dx = -\frac{dy}{\cos x} = 0$. Nun ist aber

$\cos v\, x = y = 1 - \sin x = 1 - \sqrt{(1 - \cos x^2)}$, also

$1 - y = \sqrt{(1 - \cos x^2)}$, und $1 - 2y + y^2 = 1 - \cos x^2$, und

$\cos x^2 = 2y - y^2$, oder $\cos x = \sqrt{(2y - y^2)}$.

Setzt man diesen Werth statt $\cos x$ in die vorige Differenzialgleichung, so erhält man

$$dx = \frac{-dy}{\sqrt{(2y - y^2)}} = 0.$$

Es ist daher das Differenzial eines Kreisbogens, dessen Cosinus versus gegeben ist, dem negativen Differenziale des Cosinus versus durch den Cosinus desselben Bogens dividirt gleich.

§. 53.

Mit Hülfe der bisher entwickelten trigonometrischen Differenzialfunktionen wird es nun gar nicht schwer seyn, die Differenzialfunktionen solcher Funktionen zu finden, in welchen trigonometrische Grössen vorkommen. Nur einige Beispiele können zur Erläuterung genügen.

1. Es sey $\sin x = 2y\sqrt{(1 - y^2)}$. Man setze $2y\sqrt{(1 - y^2)} = z$, so wird $\sin x = z$. Man findet daher $dz = d.\sin x = dx.\cos x$. Nun ist aber $\cos x = \sqrt{(1 - \sin x^2)} = \sqrt{(1 - z^2)}$, und daher $dz = dx.\sqrt{(1 - z^2)}$, folglich

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}} = 0.$$

Digitized by Google

Ferner findet man $dz = 2dy\sqrt{(1-y^2)} - \frac{2y^2dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$

$= \frac{2dy(1-y^2)-2y^2dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{2dy(1-2y^2)}{\sqrt{(1-y^2)}} = 0,$

und $\sqrt{(1-z^2)} = \sqrt{[1-4y^2(1-y^2)]} = \sqrt{(1-4y^2+4y^4)} = 1-2y^2.$

Setzt man diese Werthe gehörig in die vorige Differenzialfunktion, so findet man

$$dx = \frac{2dy(1-2y^2)}{(1-2y^2)\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{2dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = 0.$$

2. Es sey $y = \cos x^{\sin x}$. Man setze $\cos x = z$, und $\sin x = q$, so wird

$y = z^q$, mithin $dy = z^q\left(dq.lz + \frac{q\,dz}{z}\right)$. Nun hat man aber

$z^q = \cos x^{\sin x}$, $dq = d.\sin x = dx.\cos x$, und $dz = d.\cos x = -dx.\sin x$;

also wird, wenn diese Werthe gehörig substituirt werden

$$dy = \cos x^{\sin x}dx\left(\cos x.l.\cos x - \frac{\sin x^2}{\cos x}\right) = 0.$$

3. Es sey $y = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan g\,x^2)}}$, so findet man $dy = \frac{-dx.\tan g\,x}{\sqrt{(1+\tan g\,x^2)}}$.

4. Es sey $y = \cos\left(l.\frac{1}{x}\right)$. Man setze $l.\frac{1}{x} = z$, so wird $y = \cos z$, und man hat

$dy = d.\cos z = -dz.\sin z$. Nun ist aber $dz = d.l.\frac{1}{x} = d.(l.1 - lx)$

$= -d.lx = -\frac{dx}{x}$, und $\sin z = \sin\left(l.\frac{1}{x}\right)$; also erhält man

$$dy = +\frac{dx}{x}\sin\left(l.\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

§. 54.

Was die höhern Differenzialfunktionen der trigonometrischen Grössen betrifft, so reichen die festgesetzten Vorschriften hin, sie ebenfalls mit mathematischer Evidenz zu entwickeln. Ein Paar Beispiele können genügen:

Es sey $y = \sin x$ und $z = \cos x$, so ergeben sich die höhern Differenzialfunktionen auf folgende Art:

Digitized by Google

$y = \sin x$ $\qquad$ $z = \cos x$

$dy = dx.\cos x = 0$, und $dz = -dx.\sin x$ und

$\frac{dy}{dx} = \cos x = \frac{0}{0}$ $\qquad$ $\frac{dz}{dx} = -\sin x = \frac{0}{0}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = \frac{{}^20}{0^2}$ $\qquad$ $\frac{d^2z}{dx^2} = -\cos x = \frac{{}^20}{0^2}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x = \frac{{}^30}{0^3}$ $\qquad$ $\frac{d^3z}{dx^3} = +\sin x = \frac{{}^30}{0^3}$

$\frac{d^4y}{dx^4} = +\sin x = \frac{{}^40}{0^4}$ $\qquad$ $\frac{d^4z}{dx^4} = +\cos x = \frac{{}^40}{0^4}$

$\frac{d^5y}{dx^5} = +\cos x = \frac{{}^50}{0^5}$ $\qquad$ $\frac{d^5z}{dx^5} = -\sin x = \frac{{}^50}{0^5}$

u. f. u. f. $\qquad$ u. f. u. f.

Auf eine ähnliche Art findet man die höhern Differenzialfunktionen der Tangente eines Kreisbogens x. Es sey nämlich $\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so erhält man

$dy = \frac{dx}{\cos x^2} = 0$, und $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2} = \frac{0}{0}$; mithin ferner

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\sin x}{\cos x^3} = \frac{{}^20}{0^2}$;

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{\cos x^2} + \frac{6\sin x^2}{\cos x^4}$; aber $\sin x^2 = 1 - \cos x^2$; also

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{\cos x^2} + \frac{6}{\cos x^4} - \frac{6}{\cos x^2} = \frac{6}{\cos x^4} - \frac{4}{\cos x^2} = \frac{{}^30}{0^3}$

$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24\sin x}{\cos x^5} - \frac{8\sin x}{\cos x^3} = \frac{{}^40}{0^4}$

$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{\cos x^6} - \frac{120}{\cos x^4} + \frac{16}{\cos x^2} = \frac{{}^50}{0^5}$.

§. 55.

Nicht weniger einleuchtend und befriedigend lassen sich die Differenzialfunktionen solcher Funktionen entwickeln, welche zwei oder mehrere veränderliche Grössen enthalten, ohne dass man nöthig hätte, auf unendlich kleine Grössen, oder auf Grenzen der Verhältnisse u. dgl. Rücksicht zu nehmen. Alle merkwürdige und wichtige Eigenschaften der heterogenen und homogenen Funktionen von noch so vielen veränderlichen Grössen fliessen ohne Widerrede aus der gleich anfänglich festgesetzten

Digitized by Google

Voraussetzung: dass eine jede Differenzialfunktion irgend einer gegebenen Funktion die allereinfachste Differenzform der allgemeinen Differenzfunktion ist, in welcher die Differenzen der veränderlichen Grössen gleich Null geworden sind. Die folgenden Untersuchungen werden dies klar vor die Augen legen. Vor allen Dingen ist hier nur im Allgemeinen zu bemerken, dass in Funktionen von mehreren veränderlichen Grössen keine von der andern abhängt, so dass, wenn die eine veränderliche Grösse eine Veränderung erleidet, die übrigen nicht brauchen verändert zu werden. Man nehme zuerst eine Funktion von den beiden veränderlichen Grössen x und y an, so kann die eine verändert werden, ohne dass dies bei der andern erfolgt; es können aber auch beide zugleich eine Veränderung erleiden. Wir wollen uns vorzüglich erst mit dem zweiten Falle beschäftigen, wo die beiden veränderlichen Grössen x und y zugleich eine Aenderung leiden, und die Differenzialfunktionen nach obiger Voraussetzung bestimmen. Es sey also:

$$\Delta(x+y) = x+\Delta x+y+\Delta y-x-y = \Delta x+\Delta y,$$

und daher, wenn Δx und Δy gleich Null gesetzt werden, das Differenzial

$$d(x+y) = dx+dy.$$

$$\Delta(xy) = (x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy = xy+x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y-xy$$
$$= x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y,$$

mithin, wenn Δx und Δy gleich Null geworden sind, das Differenzial

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx.$$

$$\Delta\frac{x}{y} = \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y} = \frac{xy+y\Delta x-xy-x\Delta y}{y^2+y\Delta y} = \frac{y\Delta x-x\Delta y}{y^2+y\Delta y},$$

und daher, wenn Δx und Δy gleich Null geworden sind, das Differenzial

$$d.\frac{x}{y} = \frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}.$$

$$\Delta(a+x^2)(y-x) = [a+(x+\Delta x)^2][(y+\Delta y)-(x+\Delta x)]-(a+x^2)(y-x)$$
$$= [(a+x^2)+(2x\Delta x+\Delta x^2)][(y-x)+(\Delta y-\Delta x)]-(a+x^2)(y-x)$$
$$= (a+x^2)(y-x)+(a+x^2)(\Delta y-\Delta x)+(y-x)(2x\Delta x+\Delta x^2)+(2x\Delta x+\Delta x^2)(\Delta y-\Delta x)$$
$$-(a+x^2)(y-x)$$
$$= (a+x^2)(\Delta y-\Delta x)+(y-x)(2x\Delta x+\Delta x^2)+(2x\Delta x+\Delta x^2)(\Delta y-\Delta x)$$

und folglich, wenn Δx und Δy zugleich Null werden, das Differenzial

$$(a+x^2)(dy-dx)+(y-x)2x\,dx = (a+x^2)dy+[2x(y-x)-(a+x^2)]dx$$

u. s. f. u. s. f.

§. 56.

Wenn die gegebenen Funktionen mehr als zwei veränderliche Grössen enthalten, so ergeben sich auf dieselbe Art mit erforderlicher Evidenz ihre Differenzialfunktionen, wie ein Paar Beispiele deutlich zeigen werden:

Digitized by Google

$$\Delta(a+bxy+cz^2) = [a+b(x+\Delta x)(y+\Delta y)+c(z+\Delta z)^2]-(a+bxy+cz^2)$$
$$= a+bxy+bx\Delta y+by\Delta x+b\Delta x\Delta y+cz^2+2cz\Delta z+c\Delta z^2-a-bxy-cz^2$$
$$= bx\Delta y+by\Delta x+b\Delta x\Delta y+2cz\Delta z+c\Delta z^2,$$

und daher, wenn Δx, Δy, Δz zugleich Null geworden sind, das Differenzial

$$= bx\,dy+by\,dx+2cz\,dz.$$

$$\Delta\frac{yz}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{(y+\Delta y)(z+\Delta z)}{\sqrt{[a^2-(x+\Delta x)^2]}} - \frac{yz}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$
$$= \frac{yz+y\Delta z+z\Delta y+\Delta y\Delta z}{[(a^2-x^2)-(2x\Delta x+\Delta x^2)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{yz}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$
$$= \frac{yz+y\Delta z+z\Delta y+\Delta y\Delta z}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x\Delta x+\Delta x^2)+\text{u.f.}} - \frac{yz}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$
$$= \frac{(yz+y\Delta z+z\Delta y+\Delta y\Delta z-yz)\sqrt{(a^2-x^2)}+\frac{1}{2}yz(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x\Delta x+\Delta x^2)-\text{u.f.}}{a^2-x^2-x\Delta x-\frac{1}{2}\Delta x^2+\text{u. f. u. f.}}$$
$$= \frac{(y\Delta z+z\Delta y+\Delta y\Delta z)\sqrt{(a^2-x^2)}+\frac{1}{2}yz(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x\Delta x+\Delta x^2)-\text{u. f.}}{a^2-x^2-x\Delta x-\frac{1}{2}\Delta x^2+\text{u. f.}}$$

und daher, wenn Δx, Δy und Δz zugleich Null geworden sind, das Differenzial

$$\frac{(y\,dz+z\,dy)\sqrt{(a^2-x^2)}+\frac{yzx\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}}{a^2-x^2} = \frac{y\,dz(a^2-x^2)+z\,dy(a^2-x^2)+yzx\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}}$$
$$= \frac{y\,dz}{\sqrt{(a^2-x^2)}}+\frac{z\,dy}{\sqrt{(a^2-x^2)}}+\frac{yzx\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

u. s. f. u. s. f.

§. 57.

Aus dieser Entwickelung der Differenzialfunktionen aller möglichen Funktionen mehrerer veränderlichen Grössen erhellt, dass eine jede solche Differenzialfunktion aus dem Produkte des Differenzials einer jeden veränderlichen Grösse mit einer eigenen Funktion der veränderlichen Grössen durch Addition vereinigt zusammengesetzt ist. Wenn z. B. die gegebene Funktion die beiden veränderlichen Grössen x und y enthält, so wird ihre Differenzialfunktion die allgemeine Form $Adx+Bdy$ annehmen, wo A und B entweder wieder Funktionen von x und y, oder nur von einer einzigen veränderlichen Grösse x oder y, oder bloss beständige Grössen sind. Hat die gegebene Funktion die drei veränderlichen Grössen x, y und z, oder auch die vier veränderlichen Grössen x, y, z, q u. s. f., so wird die allgemeine Form der Differen-

Digitized by Google

zialfunktion von drei veränderlichen Grössen $Adx+Bdy+Cdz$, und die von vier veränderlichen Grössen $Adx+Bdy+Cdz+Ddq$ u. s. f. seyn, wo A, B, C und D u. f. lauter Funktionen der veränderlichen Grössen seyn können. Wenn $V=ax^2+by^3$, also eine Funktion von den beiden veränderlichen Grössen x und y ist, so findet man $dV=2axdx+3by^2dy=Adx+Bdy$, wo A eine Funktion von x und B eine Funktion von y ist. Man sieht aber auch leicht, dass man dasselbe Resultat erhält, wenn man in der Funktion zuerst x als veränderlich, und y als beständig; alsdann aber y als veränderlich und x als beständig annimmt, und nach dieser Voraussetzung die Differenzialfunktionen sucht; im erstern Falle erhält man $dV=Adx=2axdx=0$, und im zweiten $dV=3by^2dy=Bdy=0$; und folglich, wenn beide veränderliche Grössen x und y angenommen werden, $dV=Adx+Bdy=2axdx+3by^2dy$. Wäre ferner V eine Funktion von drei veränderlichen Grössen x, y, z, z. B. $V=\frac{yz}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, so hat man

$$dV=\frac{yzxdx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}}+\frac{zdy}{\sqrt{(a^2-x^2)}}+\frac{ydz}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$
$$=Adx+Bdy+Cdz, \text{ wo also}$$

$$A=\frac{yzx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}},\ B=\frac{z}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \text{ und } C=\frac{y}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \text{ ist.}$$

Dasselbe Resultat findet man, wenn man zuerst x als veränderlich, y und z aber als beständig annimmt, wo

$$dV=\frac{yzxdy}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}}=Adx=0 \text{ wird;}$$

alsdann y als veränderlich, x und z dagegen als beständig betrachtet, wo

$$dV=\frac{zdy}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=Bdy=0 \text{ wird;}$$

endlich z allein als veränderlich und x und y als beständig gesetzt, wo

$$dV=\frac{ydz}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=Cdz=0 \text{ wird;}$$

betrachtet man daher alle drei Grössen als veränderlich, so wird

$$dV=\frac{yzxdx}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}}+\frac{zdy}{\sqrt{(a^2-x^2)}}+\frac{ydz}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

gerade so, wie es im vorigen §. nach den festgesetzten Grundprincipien der Differenzialrechnung ist entwickelt worden.

§. 38.

Aus den im vorigen §. festgesetzten Bestimmungen folgt nun die ganz allgemeine Regel zur leichten und kurzen Erfindung der Differenzialfunktionen aller mög-

Digitized by Google

lichen Funktionen einer einzigen Grösse so wol, als auch mehrerer veränderlichen Grössen, so viel man nur will.

Man nehme nach und nach eine jede der veränderlichen Grössen allein als veränderlich an, und suche in Rücksicht dieser die Differenzialfunktion, indem man alle übrige veränderliche Grössen als beständig betrachtet; hiernächst addire man alle auf solche Art gefundene einzelne Differenzialfunktionen zusammen, so wird die dadurch erhaltene Summe die gesuchte Differenzialfunktion der gegebenen Funktion seyn.

Ein Paar Beispiele werden die Anwendung dieser Regel erläutern.

Es sey $V = ax^2y - bxz^3 + cy^2z^2$, so erhält man, x allein als veränderlich angenommen,

$$dV = (2axy - bz^3)\,dx = 0 = A\,dx;$$

ferner y allein als veränderlich betrachtet,

$$dV = (ax^2 + 2cyz^2)\,dy = 0 = B\,dy;$$

endlich z allein als veränderlich angenommen,

$$dV = (2cy^2z - 3bxz^2)\,dz = 0 = C\,dz;$$

folglich alle drei veränderliche Grössen x, y, z als veränderlich gesetzt,

$$dV = (2axy - bz^3)\,dx + (ax^2 + 2cyz^2)\,dy + (2cy^2z - 3bxz^2)\,dz = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

Es sey ferner $V = \frac{ax^2\sqrt{(by+z^2)}}{\sqrt[3]{(x-cy^2)}}$,

so ergiebt sich, x allein als veränderlich betrachtet,

$$dV = \frac{[2ax(x-cy^2)\sqrt{(by+z^2)} - \frac{1}{2}ax^2\sqrt{(by+z^2)}]\,dx}{(x-cy^2)\sqrt[3]{(x-cy^2)}} = 0$$

$$= \left(\frac{2ax\sqrt{(by+z^2)}}{\sqrt[3]{(x-cy^2)}} - \frac{ax^2\sqrt{(by+z^2)}}{3(x-cy^2)\sqrt[3]{(x-cy^2)}}\right)dx = A\,dx = 0;$$

ferner y allein als veränderlich gesetzt,

$$dV = \frac{[\frac{1}{2}ax^2(x-cy^2) + \frac{2}{3}acx^2y(by+z^2)]\,dy}{(x-cy^2)\sqrt[3]{(x-cy^2)}\sqrt{(by+z^2)}}$$

$$= \left(\frac{ax^2}{2\sqrt[3]{(x-cy^2)}\sqrt{(by+z^2)}} + \frac{2acx^2y}{3(x-cy^2)\sqrt[3]{(x-cy^2)}}\right)dy = B\,dy = 0;$$

endlich z allein als veränderlich angenommen,

$$dV = \frac{ax^2z\,dz}{\sqrt[3]{(x-cy^2)^2}\sqrt{(by+z^2)}} = C\,dz = 0;$$

Digitized by Google

folglich, alle drei veränderliche Grössen als veränderlich betrachtet,

$$dV = \left(\frac{2ax\sqrt{(by+z^2)}}{\sqrt[3]{(x-cy^2)}} - \frac{ax^2\sqrt{(by+z^2)}}{3(x-cy^2)\sqrt[3]{(x-cy^2)}}\right)dx$$

$$+\left(\frac{ax^2}{2\sqrt[3]{(x-cy^2)}\sqrt{(by+z^2)}} + \frac{2acx^2y}{3(x-cy^2)\sqrt[3]{(x-cy^2)}}\right)dy$$

$$+\frac{ax^2zdz}{\sqrt[3]{(x-cy^2)}\sqrt{(by+z^2)}} = Adx+Bdy+Cdz \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

§. 59.

Aus $dV = Adx = 0$ erhält man $\frac{dV}{dx} = A = \frac{0}{0}$; aus $dV = Bdy = 0$ ergiebt sich $\frac{dV}{dy} = B = \frac{0}{0}$; aus $dV = Cdz = 0$ findet man $\frac{dV}{dz} = C = \frac{0}{0}$ u. s. f. Da nun überhaupt die Differenzialfunktion einer gegebenen Funktion von mehreren veränderlichen Grössen die allgemeine Form $dV = Adx + Bdy + Cdz +$ u. f. hat, so kann dieselbe auch durch $dV = \left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)dz$ u. f. bezeichnet werden. Die Ausdrücke $\left(\frac{dV}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)dy$, $\left(\frac{dV}{dz}\right)dz$ u. f. werden **Partial-Differenziale** genannt, von welchen ein jedes bloss die Bedeutung hat, dass die gegebene Funktion von mehreren veränderlichen Grössen in Rücksicht einer einzigen Grösse allein, deren Differenzial der Nenner anzeigt, ist differenzirt worden. Es besteht also die Differenzialfunktion einer Funktion von mehreren Grössen aus so vielen **Partial-Differenzialen**, als die gegebene Funktion veränderliche Grössen enthält. Ein jedes von diesen Partial-Differenzialen ist für sich als eine Differenzialfunktion von einer einzigen veränderlichen Grösse zu betrachten, und es hängt der Werth des einen von dem Werthe des andern nicht ab, weil in einer jeden gegebenen Funktion von mehreren veränderlichen Grössen keine derselben die andere bestimmt. Inzwischen haben sie aber doch gewisse Beziehungen gegen einander, durch welche man erst überzeugt wird, dass sie wirklich zur Differenzialfunktion einer Funktion von mehreren veränderlichen Grössen gehören. Um diese Beziehung näher kennen zu lernen, nehme man zuerst eine Funktion von den beiden veränderlichen Grössen x und y an, so weiss man, dass die allgemeine Form $dV = Adx + Bdy = \left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dy}\right)dy$ ist. Will man nun überzeugt seyn, dass eine Differenzialfunktion von der allgemeinen Form $dV = Adx + Bdy$ aus der Differenzirung der Funktion von den beiden veränderlichen Grössen x und y wirklich entstanden ist, so muss $d\left(\frac{dV}{dx}\right) = d\left(\frac{dV}{dy}\right)$ seyn, wenn $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ in Hinsicht der ver-

Digitized by Google

änderlichen Grösse y allein, und $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ in Rücksicht der veränderlichen Grösse x allein differenzirt wird. Wenn man nämlich die Funktion V von den beiden veränderlichen Grössen x und y so differenzirt, dass bloss x als veränderlich betrachtet wird, so erhält man $dV = A dx$, wo A eine Funktion von x und y ist. Wird nun $A = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ so differenzirt, dass y allein als veränderlich angenommen wird, so findet man $d.A dx = a\,dx\,dy$. Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn $Bdy = \left(\frac{dV}{dy}\right)$ so differenzirt wird, dass x allein als veränderlich betrachtet wird, da man alsdann ebenfalls $d.Bdy = a\,dy\,dx$ bekommt. Weil folglich $d.Adx = a\,dx\,dy$ ist, so hat man auch

$\left(\frac{dA}{dy}\right) = a$; und weil ferner

$d.Bdy = a\,dy\,dx$ ist, so ergiebt sich ebenfalls

$\left(\frac{dB}{dx}\right) = a = \left(\frac{dA}{dy}\right)$.

Die Ausdrücke $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dB}{dx}\right)$ sollen nichts andeuten als: wenn man A so differenzirt, dass y allein als veränderlich betrachtet, und hierauf das gefundene Differenzial durch dy dividirt wird, so wird dadurch der Werth a erhalten; und wenn man B so differenzirt, dass x allein als veränderlich angenommen, und das gefundene Differenzial durch dx dividirt wird, so ergiebt sich derselbe Werth zum Quotienten.

Diese wichtige Beziehung der beiden Funktionen A und B gegen einander soll durch einige Beispiele erläutert werden.

Es sey $V = ax + bx^2y + cy^3x^4$, so hat man

$dV = (a + 2bxy + 4cy^3x^3)\,dx + (bx^2 + 3cy^2x^4)\,dy$,

also $A = a + 2bxy + 4cy^3x^3$, und $B = bx^2 + 3cy^2x^4$.

Man differenzire nun A in Hinsicht der veränderlichen Grösse y allein, so findet man

$dA = (2bx + 12cy^2x^3)\,dy$ und $\left(\frac{dA}{dy}\right) = 2bx + 12cy^2x^3$.

Eben so differenzire man B in Rücksicht der veränderlichen Grösse x allein, so erhält man

$dB = (2bx + 12cy^2x^3)\,dx$, und $\left(\frac{dB}{dx}\right) = 2bx + 12cy^2x^3$.

Man hat also $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$.

Digitized by Google

Es sey ferner $V = \sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)}$, so findet man

$dV = \frac{\frac{1}{3}(2ax + by^2)dx + \frac{2}{3}bxy\,dy}{\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)^2}}$; also

ist $A = \frac{2ax + by^2}{3\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)^2}}$, und $B = \frac{2bxy}{3\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)^2}}$.

Nun differenzire man A in Rücksicht auf die veränderliche Grösse y allein, so ergiebt sich:

$$dA = \frac{6by\,dy(ax^2 + bxy^2)^{\frac{2}{3}} - \frac{(2ax + by^2)\,4bxy\,dy}{\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)}}}{9(ax^2 + bxy^2)\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)}}$$

$$= \frac{6by\,dy(ax^2 + bxy^2) - (2ax + by^2)\,4bxy\,dy}{9(ax^2 + bxy^2)\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)^2}}$$

$$= -\frac{2by(ax^2 - bxy^2)\,dy}{9(ax^2 + bxy^2)\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)^2}}$$ folglich

$$\left(\frac{dA}{dy}\right) = -\frac{2by(ax^2 - bxy^2)}{9(ax^2 + bxy^2)\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)^2}}.$$

Ferner differenzire man auch B in Bezug auf x allein, so erhält man:

$$dB = \frac{6by\,dx(ax^2 + bxy^2)^{\frac{2}{3}} - \frac{4bxy(2ax + by^2)\,dx}{\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)}}}{9(ax^2 + bxy^2)\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)}}$$

$$= -\frac{2by(ax^2 - bxy^2)\,dx}{9(ax^2 + bxy^2)\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)^2}}$$ und folglich

$$\left(\frac{dB}{dx}\right) = -\frac{2by(ax^2 - bxy^2)}{9(ax^2 + bxy^2)\sqrt[3]{(ax^2 + bxy^2)^2}};$$

folglich $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$.

§. 60.

Aus diesen Untersuchungen erhellt, dass nicht alle Differenzialfunktionen von der allgemeinen Form $dV = Adx + Bdy$ wirkliche Differenzialfunktionen solcher Funktionen seyn können, welche zwei veränderliche Grössen x und y enthalten. Wenn

Digitized by Google

nämlich die beiden Werthe $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dB}{dx}\right)$ einander nicht gleich sind, so kann auch die Differenzialfunktion von der vorbenannten allgemeinen Gestalt nicht durch Differenziren einer Funktion von den beiden veränderlichen Grössen x und y entstanden seyn. Daher lässt sich auch aus einer solchen gegebenen Differenzialfunktion die Funktion selbst, aus welcher jene entstanden ist, d. h. das Integral nicht finden. So findet man z. B. von der Differenzialfunktion $4y^2xdx+2yx^3dy$ keine Funktion, aus welcher jene entwickelt wäre. Da nämlich hier $4y^2x=A$, und $2yx^3=B$ ist, so hat man, y allein als veränderlich betrachtet $dA=8yxdy$, also $\left(\frac{dA}{dy}\right)=8yx$, und x allein als veränderlich genommen $dB=6yx^2dx$, folglich $\left(\frac{dB}{dx}\right)=6yx^2$, wo $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dB}{dx}\right)$ einander nicht gleich sind. Man sieht hieraus, dass die merkwürdige Eigenschaft der Funktionen von den beiden veränderlichen Grössen, welche die beiden Werthe $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dB}{dx}\right)$ gleich verlangt, in der Integralrechnung von der grössten Wichtigkeit ist.

§. 61.

Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen in Hinsicht der Beziehung der Funktionen A und B gegen einander die homogenen Funktionen. Man nehme zuerst eine homogene Funktion V der beiden veränderlichen Grössen x und y von Null Dimensionen an, und setze in dem allgemeinen Ausdrucke $dV=Adx+Bdy$ die veränderliche Grösse $y=xz$, so wird x aus der Funktion gänzlich verschwinden, und eine Funktion von z entstehen, welche Z heissen mag. Man erhält daher $dZ=Pdz$, wo P bloss eine Funktion von z ist. Es sey z. B. $V=\frac{x}{x-y}$, also eine homogene Funktion von Null Dimensionen; setzt man nun $y=xz$, so wird $V=\frac{x}{x-xz}=\frac{1}{1-z}$, mithin bloss eine Funktion von z. Aus $y=xz$ erhält man $dy=xdz+zdx$. In den allgemeinen Ausdruck $dV=Adx+Bdy$ substituire man statt dy den oben gefundenen Werth, so ergiebt sich:

$$dV=Adx+Bxdz+Bzdx.$$

Da aber dx darin nicht enthalten seyn soll, so folgt, dass $A+Bz=0$ seyn müsse, und hieraus findet man $B=-\frac{A}{z}$, und weil $z=\frac{y}{x}$ ist, $B=-A:\frac{y}{x}=-\frac{Ax}{y}$, folglich $By=-Ax$, oder $By+Ax=0$. Es muss aber auch $P=Bx$, und daher Bx gleich einer Funktion von z, d. h. einer homogenen Funktion von keiner Dimension von x und y seyn. Weil ferner aus $P=Bx$ auch $\frac{P}{x}=B$ erhalten wird, und

Digitized by Google

$B = -\frac{Ax}{y} = -\frac{A}{z}$ ist, so wird $\frac{P}{x} = -\frac{A}{z} = -\frac{Ax}{y}$, mithin $A = -\frac{Py}{xx}$, und es sind daher so wol Ax als By Funktionen von keiner Dimension von x und y.

Ist daher V eine homogene Funktion von keiner Dimension der beiden veränderlichen Grössen x und y, so besitzt ihre Differenzialfunktion $dV = Adx + Bdy$ die Eigenschaft, dass $Ax + By = 0$ ist, d. h. wenn in der Differenzialfunktion statt dx und dy die veränderlichen Grössen x und y gesetzt werden, so muss man jederzeit Null erhalten. Zur Erläuterung dienen folgende Beispiele:

Es sey $V = \frac{x}{x-y}$, so hat man $dV = \frac{dx(x-y) - xdx + xdy}{(x-y)^2}$

$= \frac{-ydx + xdy}{(x-y)^2}$, und setzt man x und y statt dx und dy, so wird $\frac{-yx + xy}{(x-y)^2} = 0$.

Es sey ferner $V = \frac{xy}{\sqrt{(x^4+y^4)}}$, so hat man

$$dV = \frac{dx\sqrt{(x^4+y^4)}y + dy\sqrt{(x^4+y^4)}x - \frac{2yx^4dx + 2xy^4dy}{\sqrt{(x^4+y^4)}}}{x^4+y^4}$$

$$= \frac{ydx(x^4+y^4) + xdy(x^4+y^4) - 2yx^4dx - 2xy^4dy}{(x^4+y^4)\sqrt{(x^4+y^4)}}$$

$$= \frac{yx^4dx + y^5dx + x^5dy + xy^4dy - 2yx^4dx - 2xy^4dy}{(x^4+y^4)\sqrt{(x^4+y^4)}}$$

$$= \frac{y^5dx + x^5dy - yx^4dx - xy^4dy}{(x^4+y^4)\sqrt{(x^4+y^4)}}$$

und wenn x und y statt dx und dy gesetzt wird

$$\frac{y^5x + x^5y - x^5y - y^5x}{(x^4+y^4)\sqrt{(x^4+y^4)}} = 0,$$

u. s. f. u. s. f.

§. 62.

Wäre überhaupt V eine homogene Funktion von n Dimensionen der beiden veränderlichen Grössen x und y, so wird man die Beziehung der beiden Funktionen A und B gegen einander in der Differenzialfunktion $dV = Adx + Bdy$ auf eine ähnliche Art bestimmen können. Setzt man nämlich $y = xz$, so wird die Funktion V die Form Zx^n erhalten, wo Z eine Funktion von z ist. Wenn hiernächst in der allgemeinen Form $dV = Adx + Bdy$ die nöthige Substitution der gleichen angenommenen Werthe, und dieselbe Entwickelung, wie im vorigen §. 61. erfolgt, so findet man den Ausdruck:

$$Ax + By = nV,$$

Digitized by Google

in welchem die merkwürdige Beziehung der beiden Funktionen A und B enthalten ist. Wenn man nämlich in der Differenzialfunktion der homogenen Funktion der beiden veränderlichen Grössen x und y von n Dimensionen statt dx und dy die veränderlichen Grössen x und y setzt, so ist der daher entstandene Ausdruck der homogenen Funktion mit der Zahl der Dimensionen multiplicirt gleich. Folgendes Beispiel kann zur Erläuterung dienen:

Es sey $V = ax^3y^2 + bxy^4 - cx^2y^3$, also eine homogene Funktion von fünf Dimensionen, so hat man

$$dV = (3ax^2y^2 + by^4 - 2cxy^3)dx + (2ax^3y + 4bxy^3 - 3cx^2y^2)dy$$

also $A = 3ax^2y^2 + by^4 - 2cxy^3$, und $B = 2ax^3y + 4bxy^3 - 3cx^2y^2$, und daher

$$Ax = 3ax^3y^2 + bxy^4 - 2cx^2y^3$$
$$By = 2ax^3y^2 + 4bxy^4 - 3cx^2y^3, \text{ und}$$
$$Ax + By = 5(ax^3y^2 + bxy^4 - cx^2y^3) = 5V$$

§. 63.

Alle die merkwürdigen Eigenschaften, welche die Funktionen von zwei veränderlichen Grössen besitzen, finden auch bei Funktionen von drei und mehreren veränderlichen Grössen statt. Wäre V eine Funktion von drei veränderlichen Grössen x, y und z, so weiss man schon, dass ihre Differenzialfunktion die allgemeine Form $dV = Adx + Bdy + Cdz$ hat, wo A, B, C lauter Funktionen von x, y und z sind. Da nun von diesen drei veränderlichen Grössen keine die andere bestimmt, so lässt sich jede, welche man will, als unveränderlich annehmen. Setzt man also zuerst z als unveränderlich, so wird $dV = Adx + Bdy$, und hieraus folgt $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$. Betrachtet man ferner y als unveränderlich, so erhält man $dV = Adx + Cdz$, und es muss $\left(\frac{dA}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dx}\right)$ seyn. Sieht man endlich x als unveränderlich an, so findet man $dV = Bdy + Cdz$, und nun muss $\left(\frac{dB}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dy}\right)$ seyn. Es haben folglich in dem Differenziale $dV = Adx + Bdy + Cdz$ die drei Funktionen A, B und C eine solche Beziehung gegen einander, dass

$$\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right); \left(\frac{dA}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dB}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dy}\right) \text{ ist.}$$

Fehlt nur eine von diesen Bedingungen der Funktionen A, B und C gegeneinander, so kann man mit Sicherheit schliessen, dass es keine Funktion gebe, aus welcher die Differenzialfunktion $Adx + Bdy + Cdz$ entstanden wäre, und es liesse sich folglich aus einer solchen Differenzialfunktion gar kein Integral finden.

Es geht nunmehr aus allem bisher Angeführten deutlich hervor, dass bei der Untersuchung aller möglichen merkwürdigen Eigenschaften der Differenzialfunktionen

Digitized by Google

solcher Funktionen, die zwei oder mehrere veränderliche Grössen enthalten, gar keine unendlich kleinen Grössen nöthig sind, sondern dass sie vielmehr mit mathematischer Evidenz aus der wahren Natur einer jeden Differenzialfunktion als der einfachsten Form der allgemeinen Differenzfunktion, in welcher die Differenzen der veränderlichen Grössen gleich Null geworden sind, abfliessen.

§. 64.

Eine vorzüglich wichtige Anwendung der Differenzialrechnung findet bei Erfindung der Reihen statt, deren es in der Mathematik so sehr viele giebt. Auch hierbei überzeugt man sich sehr leicht, dass keine unendlich kleinen Grössen zur gründlichen und anschaulichen Darstellung derselben nöthig sind. Es sey nämlich y irgend eine Funktion von x, z. B. $y = x^n$, so findet man $dy = nx^{n-1}dx = 0$, also

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} = \frac{0}{0}.$$ Hieraus erhält man ferner

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} = \frac{^20}{0^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} = \frac{^30}{0^3},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} = \frac{^40}{0^4}\ldots$$

$$\frac{d^my}{dx^m} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)x^{n-m} = \frac{^m0}{0^m}.$$

Wenn man nun in $y = x^n$ annimmt, dass aus y der Werth $y+\Delta y$ wird, wenn aus x der Werth $x+\Delta x$ wird, so findet man

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^n = x^n + n.x^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + u.f. + \frac{n.n-1.n-2\ldots.(n-m+1)x^{n-m}\Delta x^m}{1.2.3\ldots\ldots m},$$

und, wenn man die vorhin entwickelten Differenziale gehörig substituirt,

$$y+\Delta y = x^n + \frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\Delta x^m}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{d^my}{dx^m}.$$

So lässt sich also $y+\Delta y$ durch höhere Differenziale ausdrücken. Wenn nämlich y einem gewissen Werthe von x zugehört, so findet man daraus den veränderten Werth $y+\Delta y$, wenn x um $x+\Delta x$ sich ändert.

Digitized by Google

Uebrigens erhellt aus den obigen Erörterungen, dass die Ausdrücke $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ u. f. nichts weiter als allgemeine Formen sind, die alle mögliche Werthe annehmen können, ihre bestimmten Werthe aber nur dann erst erhalten, wenn aus der gegebenen Funktion die Differenzialfunktionen aller Ordnungen entwickelt, und dieselben daraus gesucht werden. Man hat also gar nicht nöthig dy als eine unendlich kleine Grösse, d^2y als eine unendlich mal kleinere, d^3y als eine unendlich unendlich mal kleinere u. s. f. als dy zu betrachten.

§. 65.

Wenn der Exponent n eine positive ganze Zahl ist, so enthält diese Reihe auch n Differenziale, und es giebt daher in derselben $n+1$ Glieder. Ist aber n eine negative ganze oder gebrochene, oder auch eine positive gebrochene Zahl, so erstreckt sie sich bis ins Unendliche. Folgende Paar Beispiele können zur Erläuterung dienen:

1. Es sey $y=x^6$, so findet man $dy=6x^5dx$, und $\frac{dy}{dx}=6x^5$; ferner wird $\frac{d^2y}{dx^2}=30x^4$; $\frac{d^3y}{dx^3}=120x^3$; $\frac{d^4y}{dx^4}=360x^2$; $\frac{d^5y}{dx^5}=720x$, und $\frac{d^6y}{dx^6}=720$; also ergiebt sich:

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^6=x^6+6x^5\Delta x+15x^4\Delta x^2+20x^3\Delta x^3+15x^2\Delta x^4+6x\Delta x^5+\Delta x^6,$$

gerade so, wie es der binomische Lehrsatz giebt.

2. Man soll den Werth der gegebenen Funktion $3x^3+2x^2$ finden, wenn $x+2$ statt x gesetzt wird. Es sey also $y=3x^3+2x^2$, so hat man

$$\frac{dy}{dx}=9x^2+4x;\ \frac{d^2y}{dx^2}=18x+4;\ \frac{d^3y}{dx^3}=18.$$

Es erhält also die Funktion $3x^3+2x^2$ den Werth, wenn $x+2=x+\Delta x$ statt x gesetzt wird:

$$y+\Delta y=3x^3+2x^2+2(9x^2+4x)+2(18x+4)+\frac{4}{3}.18=3x^3+20x^2+44x+32.$$

Denselben Werth erhält man, wenn in $3x^3+2x^2$ statt x der Werth $x+2$ gesetzt wird. Man hat nämlich

statt $3x^3$ den Werth	$3(x+2)^3=3x^3+18x^2+36x+24$
statt $2x^2$ den Werth	$2(x+2)^2=\quad+2x^2+8x+8$
also Summa	$=2x^3+20x^2+44x+32$

Digitized by Google

3. Es soll der Werth von $\sqrt{(x+3)}$ gefunden werden, wenn $x+2$ statt x gesetzt wird, wo also $\Delta x = 2$ ist. Man nehme also $y = \sqrt{(x+3)}$ so findet man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(x+3)}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4(x+3)\sqrt{(x+3)}};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{8(x+3)^2\sqrt{(x+3)}}; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{15}{16(x+3)^3\sqrt{(x+3)}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{105}{32(x+3)^4\sqrt{(x+3)}} \text{ u. f. u. f.}$$

Hieraus findet man also den veränderlichen Werth von y, oder

$$y+\Delta y = \sqrt{(x+3)} + \frac{1}{\sqrt{(x+3)}} - \frac{1}{2(x+3)\sqrt{(x+3)}} + \frac{1}{2(x+3)^2\sqrt{(x+3)}}$$
$$- \frac{5}{8(x+3)^3\sqrt{(x+3)}} + \frac{7}{8(x+3)^4\sqrt{(x+3)}} - \text{u. f. ohne Ende.}$$

§. 66.

Wäre Δx negativ angenommen, mithin eine Verminderung von x, so hat man nur nöthig $x-\Delta x$ statt x zu setzen, da alsdann der veränderte Werth von y, welcher einer Funktion von x zugehört, folgende allgemeine Form erhält:

$$y+\Delta y = y - \frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} - \text{u. f.}$$

Es mag daher x eine Aenderung erleiden, welche man will, nämlich entweder um einen unbestimmten Theil zunehmen, oder auch abnehmen, so kann jederzeit der veränderte Werth von x daraus bestimmt werden.

Man soll z. B. den Werth von x^2-2x finden, wenn $x-3$ statt x gesetzt oder x um 3 kleiner wird; also ist hier $\Delta x = -3$. Nun setze man $y = x^2-2x$, so findet man $\frac{dy}{dx} = 2x-2 = \frac{0}{0}$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 = \frac{^20}{0^2}$, und es ergiebt sich

$$y+\Delta y = x^2-2x-3(2x-2)+9 = x^2-8x+15.$$

Denselben Werth erhält man, wenn in x^2-2x statt x der Werth $x-3$ gesetzt wird. Es ist nämlich:

$$x^2 = (x-3)^2 = x^2-6x+9$$
$$-2x = -2(x-3) = -2x+6$$
$$\text{Summa} = x^2-8x+15 \text{ wie vorhin.}$$

Auf diese angeführte Weise lassen sich die veränderten Werthe aller möglichen Funktionen, sie mögen rationale oder irrationale, algebraische oder transcendente Funktionen seyn, mit Hülfe der Differenzialfunktionen von allen Ordnungen nach die-

Digitized by Google

sen allgemeinen Reihen in aller mathematischer Schärfe, ohne unendlich kleiner Grössen zu bedürfen, bestimmen.

§. 67.

Was ferner die Anwendung der Differenzialrechnung auf die äusserst wichtige Erfindung des grössten und kleinsten Werthes einer Funktion betrifft, so wird man auch hierbei deutlich erkennen, dass zur anschaulichen Erörterung aller hierher gehöriger Lehren keine unendlich kleine Grössen nöthig sind. Es sey nämlich y eine Funktion von x, und der Werth von y werde anfänglich mit der Zunahme von x entweder grösser oder kleiner, alsdann aber wieder kleiner oder grösser, so muss es in beiden Fällen einen Werth von y geben, der grösser oder kleiner ist, als alle vorhergehende und alle nachfolgende sind, und eben dieser Werth von y heisst ein Grösstes oder ein Kleinstes. Hierbei ist bloss zu bemerken, dass y nur eine solche Funktion von x seyn muss, welche für denselben Werth von x entweder nur einen einzigen Werth von y, oder auch zwei für sich gleiche aber einander entgegengesetzte Werthe giebt. In solchen Funktionen, in welchen für einerlei Werth von x mehrere unter einander verschiedene Werthe von y bestimmt werden, kann der eine Werth von y ein Grösstes oder Kleinstes werden, der andere aber nicht, wofern nicht etwa die Funktion von der Beschaffenheit ist, dass bloss ein einziger reeller Werth von y für einerlei x statt findet. Wird also vorausgesetzt, dass y eine solche Funktion von x ist, dass für einen gewissen Werth von x der Werth von y entweder ein Grösstes oder Kleinstes wird, so hat das Differenzial von y die allgemeine Gestalt $dy = Adx = 0$, und daher $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = A$, und es muss folglich in diesem Falle $A = \frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = 0$ seyn; denn es wird A nothwendig positiv bleiben, so lange y für die grössern Werthe von x zunimmt, aber alsdann negativ werden, wenn beim grössern Wachsthum von x der Werth von y anfängt abzunehmen. In demselben Moment aber, wo der Werth von A aus dem positiven Zustande in den negativen übergeht, muss A nothwendig $A = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 0$ werden. Es sey z. B. $= \sqrt[3]{(2x - x^2)}$ so findet man $\frac{dy}{dx} = \frac{2(1-x)}{3\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}} = \frac{0}{0}$, und y erreicht entweder sein Grösstes oder sein Kleinstes, wenn $x = 1$ wird; in dem Falle aber, wo dies geschieht, wird auch $\frac{dy}{dx} = \frac{2(1-x)}{3\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}} = \frac{0}{0} = 0$; daraus würde man also erhalten $0 = 2(1-x)$ und daher $x = 1$. Man kann inzwischen nicht umgekehrt schliessen, dass der Werth von y für einen gewissen Werth von x entweder ein Grösstes oder ein Kleinstes werden müsse, wenn $\frac{dy}{dx} = A = \frac{0}{0} = 0$ ist, indem in einem solchen Falle weder ein Grösstes noch ein Kleinstes statt finden kann. Man hat also noch auf andere Umstände

Digitized by Google

Rücksicht zu nehmen, aus welchen es mit Sicherheit erhellt, dass der Werth für y entweder ein Grösstes oder ein Kleinstes seyn müsse, wenn $\frac{dy}{dx} = A = \frac{0}{0} = 0$ ist.

§. 68.

Um nun diese Umstände gehörig kennen zu lernen, setze man in der gegebenen Funktion zuerst $x+a$, und alsdann auch $x-a$ statt x, so muss nothwendig in beiden Fällen die veränderte Funktion kleiner als y werden, wenn y ein Grösstes, dagegen grösser, wenn y ein Kleinstes seyn soll. Setzt man $x+a$ statt x in die gegebene Funktion, so erhält man:

$$y+\frac{a}{1}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}+\text{u. f.},$$

und $x-a$ statt x gesetzt,

$$y-\frac{a}{1}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}-\text{u. f.};$$

folglich muss, wenn y ein Grösstes ist,

$$y>y+\frac{a}{1}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\text{u. f. und auch}$$

$$y>y-\frac{a}{1}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\text{u. f. seyn;}$$

dagegen ist y ein Kleinstes, wenn

$$y<y+\frac{a}{1}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\text{u. f. und}$$

$$y<y-\frac{a}{1}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\text{u. f. gefunden wird.}$$

Da nun diese Bestimmung jederzeit statt findet, a mag einen Werth erhalten, welchen man will, so setze man a so klein, dass alle folgende Glieder der beiden Reihen zusammengenommen weniger als $\frac{a}{1}\cdot\frac{dy}{dx}$ betragen. Nun lässt sich aber kein Grösstes oder Kleinstes gedenken, wofern nicht $\frac{dy}{dx} = A = \frac{0}{0} = 0$, mithin auch $\frac{a}{1}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ ist; mithin entspringt hieraus zur Bestimmung des grössten oder kleinsten Werthes einer Funktion folgende Regel: man suche die Differenzialfunktion der gegebenen Funktion, welche die allgemeine Form $dy = Adx = 0$ hat, so wie den Werth von $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = A$, setze diesen der Null gleich, und bestimme daraus den Werth von x; diesen Werth substituire man endlich in die gegebene Funktion statt x, so wird man für y einen

Digitized by Google

Werth finden, welcher in vielen Fällen ein Grösstes oder ein Kleinstes ist. Um nun diese Fälle zu bestimmen, setze man den für y gefundenen Werth $=z$, so bekommt man

$$z+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}+\text{u. f. und}$$

$$z+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}-\text{u. f.}$$

und hieraus ergiebt sich, dass z ein Grösstes seyn muss, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, dagegen ein Kleinstes, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist. Fände man aber auch $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, so kann weder ein Grösstes noch ein Kleinstes statt finden, weil im ersten Falle

$$z+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}+\text{u. f.}>z \text{ und}$$

im zweiten Falle

$$z-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}-\text{u. f.}<z \text{ seyn würde.}$$

Fände man ferner $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{0}{0^3}=0$, so wird alsdann z ein Grösstes, wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ negativ ist; dagegen ein Kleinstes, wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ positiv ist.

Setzt man überhaupt in den beiden Reihen zwei auf einander folgende Glieder

$$\ldots+\frac{a^n}{1.2\ldots n}\cdot\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}\cdot\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \text{ und } \ldots+\frac{a^n}{1.2\ldots n}\cdot\frac{d^ny}{dx^n}-\frac{a^{n+1}}{1.2..n(n+1)}\cdot\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$$

so ist klar, dass z ein Grösstes seyn müsse, wenn $\frac{d^ny}{dx^n}$ negativ ist; aber ein Kleinstes, wenn $\frac{d^ny}{dx^n}$ positiv ist. Findet man aber $\frac{d^ny}{dx^n}=0$, so giebt es weder ein Grösstes noch ein Kleinstes.

Es sey z. B. $y^2=2rx-x^2$, so hat man

$2ydy=(2r-2x)dx$, und $\frac{dy}{dx}=\frac{r-x}{y}=\frac{0}{0}$.

Setzt man also $0=\frac{r-x}{y}$, so findet man $r=x$;

und diesen Werth von x in die gegebene Gleichung gesetzt, giebt

$y^2=2r^2-r^2=r^2$, und daher $y=r$.

Digitized by Google

Um nun zu bestimmen, ob dieser Werth für y ein Grösstes oder Kleinstes ist, suche man $\frac{d^2y}{dx^2}$; man findet $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(2rx-x^2)-(r-x)^2}{(2rx-x^2)\sqrt{(2rx-x^2)}}$,

und substituirt man statt x den gleichen Werth r,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(2r^2-r^2)}{r^3} = -\frac{1}{r}.$$

Da hier also der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist gefunden worden, so ist $y=r$ ein Grösstes.

Ausführlichere Betrachtungen über die grössten und kleinsten Werthe aller möglichen Funktionen findet man im zweiten Bande meines Grundrisses der reinen höhern Mathematik; Leipzig, 1807. 8. S. 428. ff.

§. 69.

Bei der fernern Anwendung der Differenzialrechnung zur evidenten Entwickelung der merkwürdigen Punkte in krummen Linien und des Krümmungshalbmessers des sogenannten Krümmungskreises für jeden Punkt einer krummen Linie werden ebenfalls keine unendlich kleinen Grössen verlangt. Es sey nämlich (Fig. 5) AFHL eine krumme Linie, zu welcher die Abscissenlinie AL gehört, so sagt man, sie sey gegen die Abscissenlinie hohl oder concav, wenn die Sehnen AC und CH nach dieser Seite hin Winkel einschliessen, die kleiner als zwei rechte Winkel sind; dagegen sagt man, eine krumme Linie, wie (Fig. 6.) BCGI, sey gegen die Abscissenlinie AK erhaben oder convex, wenn je zwei Sehnen derselben einen Winkel gegen die Abscissenlinie einschliessen, der grösser ist, als zwei rechte. In der ersten krummen Linie werden beim anfänglichen Wachsen der Abscissen AB, AD u. f. die dazu gehörigen Applikaten BC, DF u. f. zunehmen, nachher aber beim fernern Wachsen der Abscissen AG, AM u. f. die dazu gehörigen Applikaten GH, MI wieder abnehmen. In diesem Falle muss es aber nothwendig eine Applikate geben, welche unter allen vorhergehenden und allen nachfolgenden die Grösste ist. In der andern krummen Linie aber findet gerade das Gegentheil statt, indem anfänglich mit dem Wachsthume der Abscissen (Fig. 6.) AE u. f. die dazu gehörigen Applikaten kleiner werden; beim fernern Wachsen der Abscissen AF, AK u. f. aber die dazu gehörigen Applikaten wieder wachsen, und es muss daher hier eine Applikate geben, welche unter allen vorhergehenden und allen nachfolgenden die kleinste ist. Bei der erstern krummen Linie (Fig. 5) hat man $FD-CB=FD-ED=FE$, und $IM-HG=KG-HG=-HK$; folglich bleibt die Differenz der Applikaten oder Δy positiv, wenn sie wachsen, wird aber negativ, wenn sie abnehmen. Bei der andern krummen Linie (Fig. 6.) dagegen ist $CE-AB=DA-AB=-DB$, und $IK-GF=IK-LK=IL$; also wird anfänglich die Differenz der Applikaten negativ, nachher aber positiv. Es erhellt aus dieser Betrachtung, dass der Werth der grössten oder kleinsten Applikate nicht anders

Digitized by Google

gefunden werden kann, als wenn der Werth von $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = A$, welcher aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie entwickelt wird, gleich Null geworden ist. Es sind folglich hierbei dieselben Regeln in Anwendung zu bringen, welche zur Bestimmung des Grössten und Kleinsten aller Funktionen sind angeführt worden.

Es sey z. B. die Gleichung für die Ellipse, die Abscissen aus dem Scheitelpunkte genommen, $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, so hat man

$$2y\,dy = \left(p - \frac{2px}{a}\right) dx = 0, \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(p - \frac{2px}{a}\right) : 2y = \frac{0}{0}.$$

Setzt man nun $\left(p - \frac{2px}{a}\right) : 2y = 0$, so findet man

$$p - \frac{2px}{a} = 0, \text{ und daher } x = \tfrac{1}{2}a.$$

Substituirt man diesen Werth statt x in die gegebene Gleichung, so ergiebt sich

$$y^2 = \frac{pa}{2} - \frac{pa}{4} = \tfrac{1}{4}pa, \text{ und } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{pa}.$$

Sucht man ferner die zweite Differenzialfunktion, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{4py}{a} - 2\left(p - \frac{2px}{a}\right)\cdot\frac{dy}{dx}}{4y^2} = \frac{^20}{0^2},$$

und statt x den gleichen Werth $\frac{1}{2}a$ gesetzt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{4py}{a} - 2(p-p)\cdot\frac{dy}{dx}}{4y^2} = -\frac{4py}{a} : 4y^2 = -\frac{2}{a}\sqrt{\frac{p}{a}};$$

mithin ist $y = \frac{1}{2}\sqrt{pa}$ die grösste Applikate.

§. 70.

In der krummen Linie (Fig. 7.) ACIMNT, welche zum Theil gegen die Abscissenlinie AQ hohl, zum Theil erhaben ist, und daher eine concav-convexe Linie genannt wird, nehme man zuerst im hohlen Theile die drei Applikaten BC, FD, GI, und $BF = FG = CE = DH = \triangle x$, und ziehe durch die beiden Punkte C und D, die gerade Linie CK, welche die verlängerte Applikate GI in dem Punkte K treffen wird; so erhellt, dass die beiden Dreiecke CDE und DHK einander decken, und folglich $ED = HK$ ist. Nun sind ED und HK die Differenzen zweier Applikaten, und

Digitized by Google

die Differenz dieser Differenzen ist IH—DE=IH—KH=—IK=—Δ^2y; es ist also die zweite Differenz, mithin auch das zweite Differenzial im hohlen Theile der krummen Linie negativ.

Auf dieselbe Art nehme man in dem erhabnen Theile die drei Applikaten. ML, NP, TQ, und LP=PQ=MO=NR=Δx an, und ziehe durch die beiden Punkte M und N die gerade Linie MN, welche die Applikate QT in S treffen wird; so decken sich abermals die beiden Dreiecke MNO und NRS, mithin ist NO=RS. Es sind aber NO und TR die Differenzen zweier Applikaten, und die Differenz dieser beiden Differenzen ist=TR—NO=TR—SR=ST=Δ^2y; folglich ist die zweite Differenz mithin auch das zweite Differenzial im erhabenen Theile der krummen Linie positiv. Der Punkt in der krummen Linie, welcher den concaven Theil von dem convexen absondert, wird ein Beugungspunkt genannt. Da nun das zweite Differenzial einer krummen Linie aus dem negativen Zustand nicht anders in den positiven übergehen kann, bis $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{^20}{0^2}=A^2$ gleich Null geworden ist, so ist auch klar, dass kein Beugungspunkt in einer krummen Linie statt finden kann, wenn nicht $\frac{d^2y}{dx^2}=A^2=\frac{^20}{0^2}$ gleich Null geworden ist. Inzwischen kann es doch auch Fälle geben, wo $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ist, ohne dass ein Beugungspunkt statt findet. Soll daher die krumme Linie wirklich einen Beugungspunkt besitzen, so muss noch ausserdem der concave Theil der krummen Linie auf der einen, und der convexe Theil auf der andern Seite der durch den Punkt (Fig. 8) C gezogenen gemeinschaftlichen Tangente HE liegen.

§. 71.

Wenn die verlängerte Tangente CH (Fig. 8.) die Abscissenlinie HG in dem Punkte H und die Applikate GD in E schneidet, so erhält man die beiden ähnlichen Dreiecke HBC und CFE, und man hat:

$$HB : BC = CF : FE.$$

Setzt man nun AB=x, BC=y, so ist BG=CF=Δx und HB für den Punkt C die Subtangente; also wird:

$$y.\frac{dx}{dy} : y = \Delta x : FE, \text{ und daher}$$

$$FE = \frac{y\Delta x}{y.\frac{dx}{dy}} = \Delta x.\frac{dy}{dx}, \text{ also auch}$$

$$ED = FD - FE = \Delta y - \Delta x.\frac{dy}{dx}.$$

Digitized by Google

Nun ist aber

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \text{u. f.}$$

also wird $ED = \frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \text{u. f.}$

Da aber $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ seyn muss, wenn ein Beugungspunkt statt finden soll; so suche man aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{^20}{0^2}$, und setze denselben der Null gleich; der Werth, welcher alsdann hieraus für x gefunden wird, giebt in die gegebene Gleichung substituirt in manchen Fällen für y einen Werth, der in der krummen Linie einen Beugungspunkt bestimmt. In einem solchen Falle suche man das dritte Differenzial $\frac{d^3y}{dx^3}$, und substituire in demselben die vorhin gefundenen Werthe von x und y. Bekommt dieses Differenzial dadurch einen gewissen Werth, so ist auch jederzeit ein Beugungspunkt vorhanden; fände man aber auch $\frac{d^3y}{dx^3}$ gleich Null, aber für $\frac{d^4y}{dx^4}$ einen gewissen Werth, so ist dies ein sicheres Zeichen, dass kein Beugungspunkt vorhanden ist.

Es sey z. B. die gegebene Gleichung für eine krumme Linie $y = ax^3 - bx^2$, so findet man $dy = (3ax^2 - 2bx)\,dx = 0$, und $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 3ax^2 - 2bx$, daher

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax - 2b.$

Setzt man $6ax - 2b = 0$, so findet man $x = \frac{2b}{6a} = \frac{b}{3a}$;

dieser Werth für x in die gegebene Gleichung substituirt giebt

$$y = \frac{b^3}{27a^2} - \frac{b^3}{9a^2} = \frac{b^3 - 3b^3}{27a^2}.$$

Man differenzire weiter, so wird

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6a = \frac{^30}{0^3}.$$

Es bestimmt also $y = \frac{b^3 - 3b^3}{27a^2}$ einen Beugungspunkt in der krummen Linie.

Digitized by Google

§. 72.

In der krummen Linie (Fig. 9) FDG, deren Abscissenlinie die Linie AC ist, sey für den Punkt D die Linie MN die Tangente und DC die Normale. In der Normale nehme man einen willkührlichen Punkt E an, und beschreibe mit dem Halbmesser ED aus E einen Kreis SDL. Wenn derselbe zwischen der Tangente DN und dem Theile DHG der krummen Linie fällt, so wird er an dieser Stelle weniger Krümmung besitzen, als der Theil der krummen Linie. Je kleiner man aber den Halbmesser DE annimmt, desto mehr Krümmung bekommt der Kreis selbst, mithin auch der Theil, welcher zwischen der Tangente und dem Theile der krummen Linie liegt. Auf solche Art nähert sich also die Krümmung dieses Theils der Krümmung der krummen Linie, und der Durchschnittspunkt H des Kreises mit der krummen Linie liegt dem Punkte D desto näher. Fällt der Punkt D mit dem Punkte H zusammen, so hat alsdann der Kreis an dieser Stelle D mit der krummen Linie einerlei Krümmung, und man nennt ihn alsdann den Krümmungskreis, und seinen Halbmesser den Krümmungshalbmesser. In dieser letztern Beziehung muss die Tangente MN für den Punkt D zugleich die Tangente des Krümmungskreises seyn, und der Mittelpunkt desselben in der Normale DC liegen. Es sey daher E der Mittelpunkt des Krümmungskreises für den Punkt D der krummen Linie, $AB = x$ die Abscisse und BD die dazu gehörige Ordinate; ferner ziehe man durch H die Linie HO senkrecht auf die Abscissenlinie AC, und durch die Punkte D und E die Linien DQ und EP mit AC parallel, so ist $BO = PR = DQ = \triangle x$. Der allgemeine Ausdruck für die Normale DC einer krummen Linie ist $= y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, und ausserdem ist $HQ = HO - QO = HO - DB = HR - DP = \triangle . DB = \triangle . DP = \triangle y$. Die beiden Dreiecke DPE und DBC sind einander ähnlich, und man hat

$$DC : DB = DE : DP, \text{ oder}$$

$$y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} : y = DE : DP, \text{ oder}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} : 1 = DE : DP, \text{ und daher}$$

$$DP = \frac{DE}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}.$$

Fällt der Punkt H mit dem Punkte D zusammen, so fällt auch HO auf DB, und es wird so wol $\triangle x$ als auch $\triangle y$ der Null gleich, und man hat:

$$d . DP = dy = d . \frac{DE}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = 0 = \frac{-DE . d\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Digitized by Google

Nun ist $d.\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2dy\,d^2y}{dx^2} = \frac{dy\,d^2y}{dx^2\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$; also wird

$$dy = \frac{-DE.dy.d^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}, \text{ oder } 1 = \frac{-DE.d^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}},$$

und hieraus ergiebt sich

$$DE = \frac{-dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \text{dem Krümmungshalbmesser.}$$

Es scheint der Halbmesser des Krümmungshalbmessers hier einen negativen Werth zu erhalten, da er doch positiv seyn muss, weil die krumme Linie gegen die Abscissenlinie concav ist. Der Grund liegt aber bloss in dem zweiten Differenziale der Applikate y oder in d^2y, welches im hohlen Theile der krummen Linie jederzeit negativ ist (§. 70); daher sollte in dem letzten Ausdrucke $-d^2y$ statt d^2y stehen, und $-(-d^2y)$ ist eben so viel als $+d^2y$, wodurch eben der Krümmungshalbmesser positiv wird.

Man findet also den Halbmesser des Krümmungskreises für jeden Punkt einer krummen Linie, wenn man aus der gegebenen Gleichung derselben die Werthe von dy, dy^2, dx, dx^2 und d^2y sucht, und diese in den vorigen allgemeinen Ausdruck substituirt.

Es sey z. B. die Gleichung für die Parabel, die Abscissen aus dem Scheitelpunkte genommen, $y^2 = px$, so hat man

$$2ydy = pdx = 0, \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}, \text{ folglich } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2}.$$

Hat man Δx als beständig angenommen, wodurch auch pdx beständig wird, so findet man weiter $d.2ydy = 0 = 2dy^2 + 2yd^2y = dy^2 + yd^2y$ und daraus $\frac{dy^2}{y} = -d^2y$; ferner ergiebt sich noch aus $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2}$ der Werth $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$; also wird

$$-\frac{dx^2}{d^2y} = \frac{4y^2dy^2}{p^2} : \frac{dy^2}{y} = \frac{4y^2}{p^2};$$

mithin ist der Halbmesser der Krümmung für jeden Punkt in der Parabel

$$= \frac{4y^2}{p^2}\left(1+\frac{p^2}{4y^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{p^2}{4y^2}\right)}$$

Digitized by Google

$$= \frac{4y^3}{p^2}\left(\frac{4y^2+p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4y^3}{p^2}\cdot\frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{8y^3}$$

$$= \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{(4y^2+p^2)\sqrt{(4y^2+p^2)}}{2p^2},$$

oder, wenn man eine Funktion von x haben will,

$$= \frac{(4px+p^2)\sqrt{(4px+p^2)}}{2p^2} = \frac{(4x+p)\sqrt{(4px+p^2)}}{2p}.$$

§. 73.

Bisher ist beständig angenommen worden, dass bei Erfindung der höhern Differenzen und Differenzialen der Zuwachs der veränderlichen Grösse gleich gross, mithin eine beständige Grösse sey. Es kann aber vorausgesetzt werden, dass der Zuwachs der veränderlichen Grösse nicht beständig, sondern vielmehr veränderlich sey. In diesem Falle lassen sich ebenfalls die höhern Differenzialfunktionen mit streng mathematischer Evidenz bestimmen, ohne dabei unendlich kleine Grössen als Grundprincipien nöthig zu haben. Man setze nämlich zuerst, es sey V eine Funktion einer einzigen veränderlichen Grösse x, und es werde der erste Zuwachs von x, oder Δx nicht beständig, sondern auch als veränderlich angenommen, so weiss man, dass die zweite Differenz gefunden wird, wenn in der ersten Differenzfunktion $x+\Delta x$ statt x und $\Delta x+\Delta^2 x$ statt Δx gesetzt, und alsdann von der auf diese Weise entstandenen veränderten Differenzfunktion die erste Differenzfunktion subtrahirt wird. Auf eine ähnliche Art wird die dritte, vierte und überhaupt jede höhere Differenzfunktion gefunden. So wie nun die erste Differenzialfunktion die einfachste Differenzform der allgemeinen Differenzfunktion ist, wenn Δx gleich Null geworden, eben so ist auch die zweite Differenzialfunktion die einfachste Differenzform der zweiten allgemeinen Differenzfunktion, in welcher $\Delta^2 x$ gleich Null geworden; ferner die dritte Differenzialfunktion ebenfalls die einfachste Differenzform der allgemeinen dritten Differenzfunktion, in welcher $\Delta^3 x$ gleich Null geworden, u. s. f. u. s. f. Es erhellt also hieraus, dass in der zweiten Differenzfunktion alle Glieder, welche $\Delta x\Delta^2 x$ und $\Delta^2 x^2$ enthalten, gänzlich wegfallen, wenn $\Delta^2 x$ gleich Null geworden ist; dass ferner in der dritten Differenzfunktion alle Glieder wegfallen, in welchen $\Delta x\Delta^3 x$, $\Delta^2 x^2$, $\Delta^3 x^3$ u. f. vorkommen, wenn $\Delta^3 x$ gleich Null geworden ist, u. s. f. u. s. f.

§. 74.

Nach diesen vorausgesetzten Bestimmungen wird es gar keine Schwierigkeiten haben, die höhern Differenzialfunktionen zu entwickeln, wenn Δx als veränderlich betrachtet wird. Folgende Beispiele geben die anschaulichsten Beweise.

Es sey $V = x^2$, so hat man

$\Delta.V = 2x\Delta x + \Delta x^2$, nun ist

Digitized by Google

$\Delta V+\Delta^2V=2(x+\Delta x)(\Delta x+\Delta^2x)+(\Delta x+\Delta^2x)^2$
$=2x\Delta x+2x\Delta^2x+3\Delta x^2+4\Delta x\Delta^2x+\Delta^2x^2$
und hiervon $\Delta V=2x\Delta x+\Delta x^2$ abgezogen,
$\Delta^2V=2x\Delta^2x+2\Delta x^2+4\Delta x\Delta^2x+\Delta^2x^2$, mithin,
wenn Δ^2x Null geworden ist, das zweite Differenzial
$d^2V=2xd^2x+2dx^2$; ferner ist
$\Delta^2V+\Delta^3V=2(x+\Delta x)(\Delta^2x+\Delta^3x)+2(\Delta x+\Delta^2x)^2+4(\Delta x+\Delta^2x)(\Delta^2x+\Delta^3x)$
$+(\Delta^2x+\Delta^3x)^2$
$=2x\Delta^2x+2x\Delta^3x+10\Delta x\Delta^2x+2\Delta x^2+7\Delta^2x^2+6\Delta x\Delta^3x+6\Delta^2x\Delta^3x+\Delta^3x^2$
und hiervon $\Delta^2V=2x\Delta^2x+2\Delta x^2+4\Delta x\Delta^2x+\Delta^2x^2$ subtrahirt, giebt
$\Delta^3V=2x\Delta^3x+6\Delta x\Delta^2x+7\Delta^2x^2+6\Delta x\Delta^3x+6\Delta^2x\Delta^3x+\Delta^3x^2$
mithin, wenn Δ^3x gleich Null geworden ist, das dritte Differenzial
$d^3V=2xd^3x+6dxd^2x$ u. s. f. u. s. f.

Es sey ferner $V=x^3$, so hat man
$\Delta.x^3=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$; nun ist
$\Delta V+\Delta^2V=3(x+\Delta x)^2(\Delta x+\Delta^2x)+3(x+\Delta x)(\Delta x+\Delta^2x)^2+(\Delta x+\Delta^2x)^3$
$=3x^2\Delta x+9x\Delta x^2+7\Delta x^3+3x^2\Delta^2x+12x\Delta x\Delta^2x+12\Delta x^2\Delta^2x$
$+3x\Delta^2x^2+6\Delta x\Delta^2x^2+\Delta^2x^3$;
hiervon $\Delta V=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$ subtrahirt, giebt
$\Delta^2V=6x\Delta x^2+6\Delta x^3+3x^2\Delta^2x+12x\Delta x\Delta^2x+12\Delta x^2\Delta^2x+3x\Delta^2x^2$
$+6\Delta x\Delta^2x^2+\Delta^2x^3$, und daher,
wenn Δ^2x gleich Null gesetzt wird, das zweite Differenzial
$d^2V=6xdx^2+3x^2d^2x$ u. s. f. u. s. f.

Aus dieser allgemeinen Entwickelung der höhern Differenzialfunktionen für den Fall, wenn die Differenz der veränderlichen Grösse in den höhern Differenzfunktionen nicht gleich gross angenommen worden, geht hervor, dass man dieselben leicht und kurz findet, wenn man dx, d^2x, d^3x u. f. sammt ihren Potenzen gerade so, wie die veränderlichen Grössen selbst, behandelt, und nach den oben gegebenen Regeln verfährt. So findet man also kurz:

$d.x^3=3x^2dx$, und $d^2.x^3=6xdx^2+3x^2d^2x$ gerade wie vorhin;
$d^3.x^3=6dx^3+6xdxd^2x+12xdxd^2x+3x^2d^3x$
$=6dx^3+18xdxd^2x+3x^2d^3x$
u. s. f. u. s. f.

Eben so findet man $d.x^5=5x^4dx$, und daraus
$d^2.x^5=20x^3dx^2+5x^4d^2x$,

Digitized by Google

$$d^3.x^5 = 60x^2dx^3 + 40x^3dxd^2x + 20x^3dxd^2x + 5x^4d^3x = 60x^2dx^3 + 60x^3dxd^2x + 5x^4d^3x$$

$$d^4.x^5 = 120xdx^4 + 180x^2dx^2d^2x + 180x^2dx^2d^2x + 60x^3d^2x^2 + 60x^3dxd^3x + 20x^3dxd^3x + 5x^4d^4x$$

$$= 120xdx^4 + 360x^2dx^2d^2x + 60x^3d^2x^2 + 80x^3dxd^3x + 5x^4d^4x \text{ u. f. u. f.}$$

§. 75.

Wenn V eine Funktion von den beiden veränderlichen Grössen x und y ist, so kann man entweder den Zuwachs der einen veränderlichen Grösse als beständig, und den Zuwachs der andern als veränderlich, oder die Zuwachse der beiden veränderlichen Grössen als veränderlich betrachten. Die Differenzen beider veränderlichen Grössen kann man aber nicht als unveränderlich annehmen, weil dabei die Voraussetzung zum Grunde liegen würde, dass beim gleichförmigen Wachsthume der einen veränderlichen Grösse die andere veränderliche Grösse ebenfalls gleichförmig wachsen würde, dass folglich beide veränderliche Grössen ein gewisses Verhältniss gegen einander haben, und die Werthe der einen Grösse von den Werthen der andern abhangen müssten, welches aber nicht angenommen werden darf. Setzt man die Differenzen der beiden veränderlichen Grössen als veränderlich, so findet man die höhern Differenzialfunktionen auf dieselbe Art, wie bei den Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösse.

Es sey $V = xy$, so ist $\Delta V = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$; ferner ist

$$\Delta V + \Delta^2 V = (x+\Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (y+\Delta y)(\Delta x + \Delta^2 x)$$

$$= x\Delta y + x\Delta^2 y + 3\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta^2 y + y\Delta x + y\Delta^2 x + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$$

hiervon $\Delta V = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$ subtrahirt, giebt

$$\Delta^2 V = x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta^2 y + y\Delta^2 x + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y,$$

und daher, wenn $\Delta^2 x$ und $\Delta^2 y$ gleich Null geworden, das zweite Differenzial

$$d^2V = xd^2y + 2dxdy + yd^2x \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

Man hat weiter, wenn $V = \frac{x}{y}$ ist, $\Delta V = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2 + y\Delta y}$;

entwickelt man nun eben so wie vorhin $\Delta^2 V$ oder die zweite Differenzfunktion, und nimmt darin $\Delta^2 x$ und $\Delta^2 y$ gleich Null, so wird das zweite Differenzial

$$d^2V = \frac{y^2d^2x - 2y^2dxdy - y^2xd^2y + 2yxdy^2}{y^4}$$

$$= \frac{d^2x}{y} - \frac{2dxdy}{y^2} - \frac{xd^2y}{y^2} + \frac{2xdy^2}{y^3} \text{ u. s. f. u. s. f.}$$

Hieraus erhellt zugleich, dass die höhern Differenzialfunktionen der Funktionen von zweien oder mehreren veränderlichen Grössen nach denselben Regeln, die bereits oben auseinander gesetzt sind, kurz und leicht entwickelt werden können.

Digitized by Google

Es sey z. B. $V = ax^2y - bxy^3$, so hat man

$dV = 2axy\,dx + ax^2\,dy - by^3\,dx - 3bxy^2\,dy$; also

$d^2V = 2ay\,dx^2 + 2ax\,dy\,dx + 2ax\,dx\,dy + 2ax\,dx\,dy + ax^2\,d^2y$

$\quad - by^3\,d^2x - 3by\,dx\,dy - 3by\,dx\,dy - 3bx\,dy^2 - 3bxy\,d^2y$

$= (2axy - by^3)\,d^2x + (ax^2 - 3bxy)\,d^2y + (4ax - 4by)\,dx\,dy - 3bx\,dy^2 + 2ay\,dx^2$

u. s. f. u. s. f.

§. 76.

Es erhellt nun, dass die zweite Differenzialfunktion der Funktion V von den beiden veränderlichen Grössen x und y die allgemeine Gestalt

$d^2V = P\,d^2x + Q\,d^2y + R\,dx\,dy + S\,dy^2 + T\,dx^2$ hat,

wo die Funktionen P, Q, R, S, T eine solche Beziehung gegen einander haben müssen, dass man

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dx}\right) = T;\ \left(\frac{dQ}{dy}\right) = S;\ \text{und}\ 2\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = R$$

findet.

Sollte nur eine einzige von diesen Bedingungen fehlen, so kann man versichert seyn, dass die gegebene Differenzialfunktion keine zweite Differenzialfunktion irgend einer Funktion von den beiden veränderlichen Grössen x und y seyn könne. Folgendes Beispiel kann noch zur Erläuterung dienen.

Es sey $V = axy^2 + byx^3$, so hat man

$dV = ay^2dx + 2axy\,dy + bx^3dy + 3byx^2dx$; ferner ist

$d^2V = 2ay\,dx\,dy + ay^2d^2x + 2ay\,dx\,dy + 2ax\,dy^2 + 2axy\,d^2y$

$\quad + 6byx\,dx^2 + 3bx^2\,dx\,dy + 3byx^2\,d^2x + bx^3\,d^2y + 3bx^2dx\,dy$

$= (ay^2 + 3byx^2)\,d^2x + (2axy + bx^3)\,d^2y + (4ay + 6bx^2)\,dx\,dy + 2ax\,dy^2 + 6byx\,dx^2.$

Es ist also $P = ay^2 + 3byx^2$, $Q = 2axy + bx^3$, $R = 4ay + 6bx^2$, $S = 2ax$ und $T = 6byx$, und man hat

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2ay + 3bx^2;\ \left(\frac{dP}{dx}\right) = 6byx = T;\ \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 2ax = S \text{ und}$$

$$2\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 4ay + 6bx^2.$$

Aus diesen Entwickelungen sieht man deutlich, dass sich die höhern Differenzialfunktionen auch für den Fall, wenn das Wachsthum der ersten Differenzen nicht gleichförmig ist, mit streng mathematischer Schärfe bestimmen lassen, ohne nur im geringsten auf die mystischen Begriffe von unendlich kleinen Grössen Rücksicht nehmen zu dürfen.

Digitized by Google

Uebrigens ist noch zu merken, dass die zweiten und höhern Differenzialfunktionen keine bestimmten Werthe haben können, weil die Werthe der veränderlichen Grössen nach keinem bestimmten Gesetze zu- oder abnehmen. Wenn daher in einer gegebenen Differenzialfunktion zweite oder höhere Differenziale vorkommen, so muss sie immer andere und andere Werthe bekommen, je nachdem man das erste Differenzial dieser oder jener Funktion von x als beständig annimmt. Ausführlichere Betrachtungen hiervon findet man im zweiten Bande meines Grundrisses der reinen höhern Mathematik. S. 279 ff.

§. 77.

Endlich muss ich noch Einiges von den allgemeinen Differenzialausdrücken anführen, welche zur Rectification, Quadratur und Cubatur der krummen Linien mit Hülfe geometrischer Construktionen gefunden werden. Man hat hier ebenfalls zur anschaulichen Entwickelung derselben keine unendlich kleinen Grössen nöthig, vielmehr erscheinen sie nach den bisher festgesetzten Principien in der reinsten mathematischen Evidenz. Die Differenzialformel, welche zur Rectification oder Berechnung der Länge krummer Linien dient, lässt sich auf folgende Art bestimmen. Es sey (Fig. 1) AC ein Theil irgend einer krummen Linie, der z heissen mag; dieser nehme um das unbestimmte Stück $CF = \Delta z$ zu. Wenn nun zu dem Bogen AC die beiden auf einander senkrecht stehenden Coordinaten $AB = x$, und $BC = y$ gehören, so wird auch mit dem Wachsthume $CF = \Delta z$ die Abscisse $AB = x$ um $BH = CG = \Delta x$, und die Ordinate $BC = GH$ um $GF = \Delta y$ zunehmen. Man ziehe die Sehne CF, so erhält man das rechtwinklichte Dreieck CFG, in welchem vermöge des pythagoräischen Theorems $CF^2 = CG^2 + GF^2$, oder weil die Sehne CF von dem dazu gehörigen Bogen sehr wenig verschieden ist

$(\Delta . AC)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, und $\Delta . AC = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$ ist.

Je kleiner der Bogen CF als Wachsthum des Bogens AC angenommen wird, desto näher rückt der Punkt F dem Punkte C, desto kleiner werden alsdann auch $BH = CG = \Delta x$ und $GF = \Delta y$, und desto mehr nähert sich die Sehne CF dem dazu gehörigen Bogen. Werden endlich Δx, Δy und folglich auch Δz der Null gleich, so wird $dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$.

Diese allgemeine Differenzialform, welche aus geometrischen Gründen ist hergeleitet worden, drückt bloss aus, dass aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie der Differenzialwerth gesucht werden soll, welcher gleich $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz$ seyn soll, mithin auch der Null gleich geworden seyn muss, welches aber nicht anders möglich ist, als wenn in der allgemeinen Differenzform Δx, also auch Δy gleich Null geworden. Wie alsdann aus dieser Differenzialfunktion die krumme Linie in Ansehung ihrer Länge berechnet wird, muss die Integralrechnung zeigen.

Es sey z. B. AC ein Kreisbogen, und die Gleichung für die Kreislinie, die Abscissen aus dem Scheitelpunkte auf dem Durchmesser gerechnet, $y^2 = 2rx - x^2$,

Digitized by Google

so hat man $2y\,dy = 2r\,dx - 2x\,dx$, oder $y\,dy = (r-x)\,dx = 0$, und

$dy = \frac{(r-x)\,dx}{y}$; daher $dy^2 = \frac{(r-x)^2\,dx^2}{y^2}$, und

$$dy^2 + dx^2 = \frac{(r-x)^2\,dx^2 + (2rx-x^2)\,dx^2}{2rx-x^2}$$

$$= \frac{(r^2-2rx+x^2+2rx-x^2)\,dx^2}{2rx-x^2} = \frac{r^2\,dx^2}{2rx-x^2} = dz^2, \text{ und}$$

$dz = \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = 0$, und dies ist die gesuchte Differenzialfunktion, welche integrirt die Länge des Kreisbogens AC giebt.

Auf dieselbe Art sucht man für jede andere krumme Linie aus der gegebenen Gleichung derselben in einer Differenzialfunktion den Werth von $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, und integrirt sie alsdann.

§. 78.

Was die allgemeine Differenzialfunktion betrifft, welche zur Quadratur oder Berechnung des Quadratinhalts solcher Flächen, welche entweder von krummen oder von krummen und geraden Linien zugleich begrenzt sind, dient, so lässt sie sich auf folgende Art bestimmen. Es sey nämlich (Fig. 1) $AB = x$, $BC = y$, und AC der zu diesen Coordinaten gehörige Bogen einer krummen Linie AF; es nehme der Bogen AC um den willkührlichen Theil CF zu, so wächst auch die Abscisse $AB = x$ um $BH = \triangle x$, und die Applikate $BC = y$ um $GF = \triangle y$. Setzt man nun die Fläche CAB, welche von der krummen Linie AC und den beiden Coordinaten begrenzt ist, $= Q$, so ist der Zuwachs derselben $BHFC = \triangle Q$. Nun ist der Flächeninhalt des Rechteckes $GCBH = y.\triangle x$ und der Flächeninhalt des Dreiecks $CGF = \frac{\triangle x.\triangle y}{2}$; also wird

$$\triangle Q = y\triangle x + \frac{\triangle y\triangle x}{2}.$$

Je kleiner nun der Bogen CF angenommen wird, desto kleiner werden auch $\triangle x$ und $\triangle y$, und desto mehr nähert sich das Trapez BCFH dem Rechtecke BCGH. Werden endlich so wol $\triangle x$ als auch $\triangle y$ gleich Null, so wird auch BCFH gleich Null, und man hat alsdann

$$dQ = y\,dx = 0.$$

Dieser allgemeine Differenzialausdruck, der aus geometrischen Gründen hervorgegangen ist, giebt bloss zu erkennen, dass aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie, deren Quadratur gesucht werden soll, ein Differenzialwerth zu suchen ist, der $y\,dx$ gleich ist, und welcher daher ebenfalls gleich Null seyn muss. Wie hiernächst aus dieser Differenzialfunktion die Quadratur der krummen Linie zu bestimmen ist, muss die Integralrechnung zeigen.

Digitized by Google

Ist z. B. ABC ein Stück Kreisfläche, und es ist die Gleichung für die Kreislinie $y^2 = 2rx - x^2$, also $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ mithin

$$y\,dx = dx\sqrt{(2rx - x^2)} = 0,$$

und dies ist die gesuchte Differenzialfunktion, welche durch Integriren den Flächeninhalt des Theils der Kreisfläche giebt.

Auf eine ähnliche Art verfährt man bei den übrigen krummen Linien.

§. 79.

Wenn man annimmt, dass sich die Fläche (Fig. 1) ABC um die feste Axe AB herumdreht, so beschreibt dieselbe einen körperlichen Raum, welcher ein Afterkegel genannt wird, und der Bogen AC eine krumme Oberfläche, eine sogenannte Afterkegelfläche. Zur Berechnung der letztern muss ebenfalls eine allgemeine Differenzialform bestimmt werden, nach welcher aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie ein Differenzialwerth einzurichten ist. Man nehme an, dass zu dem Bogen AC die beiden Coordinaten $AB = x$ und $BC = y$ gehören, und dass mit dem Wachsthume CF des Bogens AC auch die Abscisse $AB = x$ um $BH = \Delta x$, und die Applikate BC um $GF = \Delta y$ wachsen. Durch die beiden Punkte C und F ziehe man die gerade Linie FC und verlängere sie so weit bis sie die Axe EH in dem Punkte E schneidet. Hierauf stelle man sich vor, dass sich die ganze Figur EHF um die unbewegliche Axe EH drehe, so werden die beiden rechtwinklichten Dreieeke EHF und EBC gerade Kegel, das Trapez CBHF einen abgekürzten geraden Kegel, und der Bogen AC eine Afterkegelfläche beschreiben. Der Halbmesser der Grundfläche des grössern Kegels ist FH, und der Halbmesser der Grundfläche des kleinern Kegels CB. Nun ist die krumme Oberfläche des grössern Kegels $= \pi . FH . FE$, und die krumme Oberfläche des kleinen Kegels $= \pi . BC . CE$, mithin die krumme Oberfläche des abgekürzten geraden Kegels $= \pi . FH . FE - \pi . BC . CE = \pi (FH . FE - BC . CE)$.

Nun ist $FH = FG + GH = CB + GF = y + \Delta y$ und $FE = FC + CE$, mithin wird

$$\begin{aligned}\pi (FH . FE - BC . CE) &= \pi [(CB + GF)(FC + CE) - BC . CE] \\ &= \pi (BC . FC + BC . CE + GF . FC + GF . CE - BC . CE) \\ &= \pi (BC . FC + GF . FC + GF . CE).\end{aligned}$$

Ferner ist $BC = y$, $FC = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, $GF = \Delta y$, und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke CFG und CEB:

$FG : CB = FC : CE$, oder $\Delta y : y = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} : CE$

$$CE = \frac{y\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y}, \text{ mithin}$$

$$BC . FC = y\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \qquad GF . FC = \Delta y\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

$$GF . CE = \Delta y . \frac{y\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y} = y\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)},$$

Digitized by Google

und es wird daher

$$\pi(BC.CF+GF.FC+GF.CE)=\pi[2y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}+\Delta y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}]$$

Je kleiner nun Δx mithin auch Δy wird, desto kleiner wird $\Delta y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$. Wird endlich Δx und Δy gleich Null, so erhält man

$$2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \text{dem Differenzial der Afterkegelfläche,}$$

welche von dem Bogen AC beschrieben wird. Setzt man also diese P, so hat man auch $dP = 2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 0$.

Nach dieser allgemeinen Differenzialform, welche aus geometrischen Gründen ist abgeleitet worden, muss daher die Gleichung für die krumme Linie behandelt werden, d. h. man muss aus derselben einen Differenzialwerth suchen, welcher so wol $2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ gleich, als auch der Null gleich geworden ist. Auf welche Art hiernächst aus diesem Differenzialwerth der Quadratinhalt der Afterkegelfläche gefunden wird, muss die Integralrechnung zeigen.

Für die Kreislinie z. B. war

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{r\,dx}{y} = 0 \text{ (§. 77.), also wird}$$

$$2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 2\pi y\,.\,\frac{r\,dx}{y} = 2\pi r\,dx = dP,$$

wovon das Integral die krumme Oberfläche eines Kugelstücks bestimmt, welches von dem Werthe x abhängt.

§. 80.

Unter der Cubatur einer krummen Linie versteht man die Berechnung des körperlichen Inhalts eines Körpers, welcher entweder von krummen und ebenen Flächen, oder von krummen Flächen allein begrenzt ist. Nimmt man, wie im vorigen §. an, dass sich (Fig. 1.) EFH um die feste Axe EH drehe, so beschreiben die beiden rechtwinklichten Dreiecke EHF und EBC gerade Kegel, das Trapez CBHF einen abgekürzten geraden Kegel, und die von der krummen Linie CA mit den beiden geraden Linien AB und BC begrenzte Fläche einen Afterkegel, welcher Q heissen mag. Nun findet man den körperlichen Inhalt des grössern geraden Kegels $= \frac{\pi}{3}.HF^2.HE$, und den körperlichen Inhalt des kleinern Kegels $= \frac{\pi}{3}.BC^2.BE$; mithin der körperliche Inhalt des abgekürzten geraden Kegels, welcher vom Trapez CBHF beschrieben wird,

$$= \frac{\pi}{3}.HF^2.HE - \frac{\pi}{3}.BC^2.BE = \frac{\pi}{3}(HF^2.HE - BC^2.BE).$$

Digitized by Google

Nun ist $HF = HG + GF = BC + GF = y + \Delta y$, also

$HF^2 = (y+\Delta y)^2 = y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$,

$EH = BH + BE = CG + BE = \Delta x + BE$.

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke CFG und CEB erhält man aber $FG : GC = CB : BE$, oder

$\Delta y : \Delta x = y : BE$, und $BE = \frac{y\Delta x}{\Delta y}$, daher wird

$HE = \Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y}$. Man findet also

$$\frac{\pi}{3}(HF^2 . HE - BC^2 . BE)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[(y^2+2y\Delta y+\Delta y^2)\left(\Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y}\right) - y^2 . \frac{y\Delta x}{\Delta y}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(y^2\Delta x + \frac{y^3\Delta x}{\Delta y} + 2y\Delta x\Delta y + 2y^2\Delta x + \Delta x\Delta y^2 + y\Delta x\Delta y - \frac{y^3\Delta x}{\Delta y}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}(3y^2\Delta x + 3y\Delta x\Delta y + \Delta x\Delta y^2).$$

Setzt man nun noch den körperlichen Raum, welcher von dem kleinen Abschnitt zwischen der krummen Linie CF und der dazu gehörigen Sehne CF beschrieben wird, $= S$, so findet man den ganzen körperlichen Inhalt, welcher von der Fläche CBHF beschrieben wird,

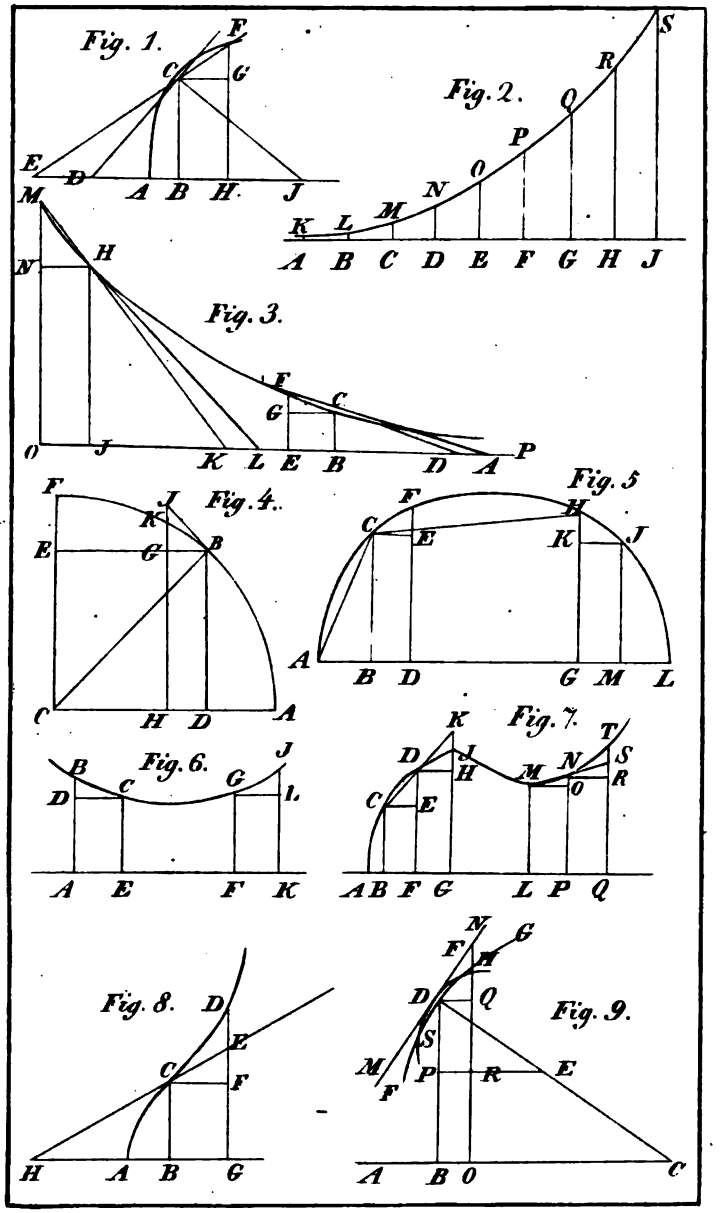
$$= \pi y^2\Delta x + \pi y\Delta x\Delta y + \frac{\pi}{3}\Delta x\Delta y^2 + S = \Delta Q.$$

Je kleiner Δx mithin auch Δy wird, desto mehr wird ΔQ dem Werthe von $\pi y^2\Delta x$ gleich. Werden endlich beide Δx als auch Δy gleich Null, so erhält man auch $\pi y^2 dx = dQ = 0$.

Diese allgemeine Differenzialform, welche aus geometrischen Gründen ist entwickelt worden, giebt bloss zu erkennen, dass aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie, deren Cubatur gesucht werden soll, ein Differenzialwerth zu bestimmen ist, welcher gleich $\pi y^2 dx$, und eben daher auch der Null gleich seyn muss. Aus diesem Differenzialwerth wird hiernächst die Cubatur der krummen Linie durch die Integralrechnung bestimmt.

Digitized by Google

Digitized by Google



Fischer Grundprinc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google